

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ecole Normale Supérieure de Bousaâda  
Département de Mathématiques



المدرسة العليا للأساتذة - بوسعادة  
قسم: الرياضيات

# COURS ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. M 415

4<sup>ème</sup> Mathématiques PES & PEM

ENS de Bousaâda

*Dr. Ahmed ABBASSI*

## INTRODUCTION.

Les équations différentielles ont été étudiées grâce aux travaux de **Newton** (1642-1727) en calcul différentiel et intégral. Plusieurs problèmes célèbres de l'époque ont été résolus soit par intégration directe, soit par des méthodes approchées. Ainsi, **Leibniz** (1646-1716), les frères **Bernoulli** (1654-1705 et 1667-1748) et **Christiaan Huygens**, (1629–1695). Ont résolu presque simultanément le problème de la chaîne, c'est-à-dire le problème de la détermination de la forme prise par une chaîne suspendue à ses extrémités et influencée uniquement par son poids. **Jean Bernoulli** (1654–1705) a posé le problème de la brachistochrone en 1696, connaissant déjà la solution, comme un défi aux mathématiciens de son temps. La brachistochrone est la courbe reliant deux points tels qu'une bille roulant le long de cette courbe sans frottement, lancée avec une vitesse nulle depuis le point le plus haut, atteigne le point le plus bas dans le temps le plus court possible.

**Euler** (1707–1783) a énuméré toutes les équations différentielles résolubles analytiquement, c'est-à-dire celles pour lesquelles des formules explicites permettant d'obtenir des solutions étaient disponibles. La complexité des solutions de certaines équations différentielles apparemment anodines suggère qu'une alternative au calcul de la solution exacte était probablement souhaitable. Cependant, la véritable avancée de ces méthodes numériques alternatives a eu lieu au XIXe siècle, lorsque **Liouville** (1809–1882) a prouvé que certaines équations ne pouvaient être résolues analytiquement, c'est-à-dire que leurs solutions existaient réellement mais ne pouvaient être exprimées sous la forme d'un ensemble de fonctions élémentaires. Ce résultat important, comparable à l'impossibilité de résoudre des équations polynomiales de degré supérieur à 5 à l'aide de racines, a également stimulé les travaux théoriques sur l'existence et l'unicité des solutions aux équations différentielles.

Les problèmes posés ou menant à des équations différentielles sont aussi vieux que l'analyse elle-même. Avant même qu'on ait complètement élucidé la question des infiniment petits, l'on se préoccupe déjà de résoudre des problèmes de tangente, qui mènent invariablement à une équation différentielle. De la même manière, dès les débuts de la mécanique classique, dite newtonienne, on cherche à résoudre des problèmes de  $n$  points matériels qui tous mènent à l'intégration d'un système de  $3n$  équations différentielles du second ordre, où les inconnues sont des fonctions du temps représentant des coordonnées des points.

La théorie importante dans cette présentation est le théorème d'existence et d'unicité ou de **Cauchy- Lipschitz**. **Cauchy** (1789-1857) Il va appliquer le calcul différentiel et intégral aux équations différentielles cette idée qui lui a déjà servi à révolutionner l'étude des fonctions continues et dérivables : utiliser la notion de limite pour transformer des

schémas connus d'approximation en démonstrations d'existence. Cauchy se pose le problème de l'existence des êtres mathématiques étudiés. Convaincu de l'impossibilité de trouver, en général, les solutions explicites d'une équation différentielle, il pose et il résout, dans des conditions assez larges, le problème de leur existence.

**Lipschitz** (1832-1903) reproduit en 1868 la première méthode de **Cauchy**, sous des hypothèses légèrement plus faibles, puisqu'il suppose seulement  $f$  continue et telle que :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Au voisinage du point  $c$  c'est ce que l'on appelle maintenant une condition de **Lipschitz**. Elle intervient déjà implicitement dans le travail de **Cauchy**.

Ce cours est une introduction aux aspects théoriques et des équations différentielles au niveau 4 PEM & PES de l'ENS de Bousaâda en particulier présenter les méthodes analytiques les plus utilisées à l'heure actuelle. Il ne s'intéresse pas non plus aux aspects systèmes dynamiques des équations différentielles. Il est partagé en Cinq grandes parties comme annoncé dans le programme.

Enfin, ce cours a été initialement écrit par Dr. Ahmed ABBASSI à partir de plusieurs références et livres bibliographiques.

**Cours semestre 1**  
**Equations différentielles ordinaires**

# Équations Différentielles

## Chapitre. I : Équations différentielles résultats fondamentaux

### 1-1. Définition

**Définition1.** On appelle équation différentielle une relation entre une fonction inconnue et leurs dérivées. C'est-à-dire une équation de la forme :

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

- Si la fonction cherchée  $y$  est une fonction de la seule variable l'équation est dite **ordinaire** (EDO en abrégé).

- Lorsque la fonction  $y$  dépend de deux variables ou plusieurs, par exemple :  $y = f(x, t)$  ; l'équation est dite aux dérivées partielles.  $\left[ F \left( x, t, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial^n x \partial^n t} \right) = 0 \right]$ .

### Exemples :

1)  $\frac{dy}{dx} + xy = 0$ ,  $y'' + y' + x = \cos x$ ,  $y = \frac{1}{2}x^2y'' - 5x$  sont des équations- diff- ordinaire.

2)  $\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  sont des équations aux dérivées partielles.

**Définition2.** On appelle ordre de l'équation différentielle l'ordre de la dérivée le plus élevée figurant dans l'équation.

### Exemples :

$y'' + y' + x = \cos x$  est une équation-diff d'ordre 2.

$y^{(7)} + y^{(3)} + x + 2 = 0$  est une équation-diff d'ordre 7.

### 1-1-1. Equa. Diff du premier ordre.

La forme générale de l'équation du premier ordre est :  $F(x, y, y') = 0 \dots (1)$ .

Supposons que cette équation (1) est résolue (implicitement) par rapport à  $y'$ , c'est-à-dire qu'elle est en fait de la forme :  $y' = f(x, y) \dots (2)$  cette équation différentielle est dite **normale**.

**Remarque.** La fonction  $f$  est une fonction donnée de deux variables définies sur une partie  $U$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue.

On considère l'équation différentielle du premier ordre : (E) :  $y' = f(x, y)$

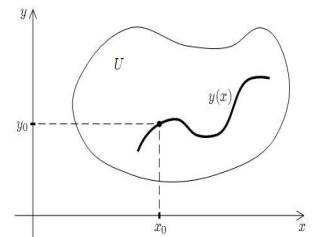
### 1.1.2. Solutions d'une équation différentielle :

**Définition 1.** Une solution ou intégrale de (E) sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  est une fonction dérivable

$y : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\forall x \in I: (x, y(x)) \in U$$

$$\forall x \in I: y'(x) = f(x, y(x))$$



**Problème de Cauchy** - Soit  $(x_0, y_0) \in U$ , le problème de **Cauchy** consiste à trouver une solution  $y$  de (E) sur un intervalle  $I$  contenant  $x_0$  dans son intérieur, telle que  $y(x_0) = y_0$ . (La relation  $y(x_0) = y_0$  est dite *Condition initiale* de (E)).

**Remarque.** Résoudre le problème de **Cauchy** revient à trouver une "courbe intégrale" de (E) passant par un point donné  $(x_0, y_0) \in U$ .

### Solutions locales, maximales, globales.

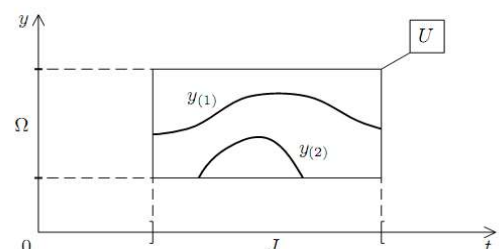
Avant de donner le théorème d'existence de la solution, il est bon de préciser quel type de solution on recherche. Pour cela, on introduit les définitions suivantes.

**Définition1.** On appelle solution locale du problème de Cauchy (E) la donnée d'un couple  $(J, y)$  où  $J$  un intervalle ( $J \subset I$ ) qui est voisinage de  $x_0$ . Si  $(J, y)$  solution de (E).

**Définition2.** Soient  $y: I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{y}: I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  deux solutions locales de (E). On dit que  $\tilde{y}$  est un prolongement de  $y$  si :  $I_1 \subset I_2$  et  $\tilde{y}|_{I_1} = y$ .

**Définition 3.** On dit qu'une solution locale  $(I, y)$  est maximale si  $y$  n'admet pas de prolongement.

**Définition 4.** Une solution  $(J, y)$  est dite globale si elle est définie partout, sur  $I$  tout entier ( $J = I$ ).



$y_1$  est globale

$y_2$  est maximale mais n'est pas globale

**Attention.** Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fautive.

**Exemple :** Soit  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

(E):  $y' = y^2$  . Cherchons les solutions de (E)

$y(x) = 0$  est une solution évidente de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

Si  $y \neq 0$  (E)  $\Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} = dx$

Donc :  $y = \frac{-1}{x-c}$

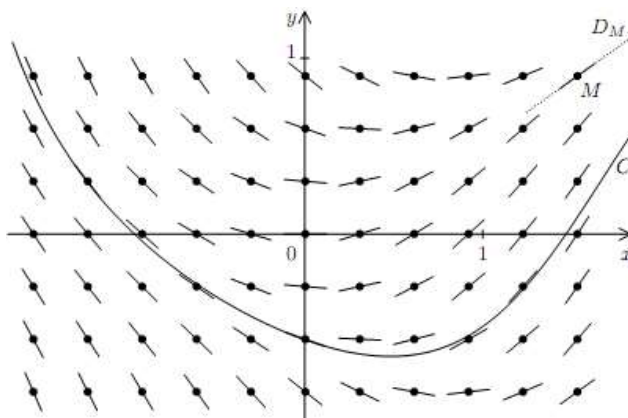
Cette formule définit en fait deux solutions, définies respectivement sur  $] -\infty, c[$  et sur  $] c, +\infty[$  ; ces solutions sont maximales mais non globales. Dans cet exemple  $y(x) = 0$  est la seule solution globale de (E).

### Champ de vecteurs.

1- **Champ des tangentes** – A tout point  $M = (x, y)$  on associe la droite  $DM$  passant par  $M$  et de coefficient directeur

$$f(x_0, y_0) : DM : y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

L'application  $M \rightarrow DM$  est appelée *champ des tangentes* associé à l'équation (E).



2- L'équation différentielle :  $y' = f(x, y)$  peut s'interpréter comme un *champ de vecteurs* sur le domaine  $U$  de définition de  $f$ .

La fonction  $:(x, y) \mapsto (1, f(x, y))$  est alors une application de  $U$  vers  $\mathbb{R}^2$ , autrement dit, une application qui à chaque point de  $U$  fait correspondre un vecteur de l'espace vectoriel dont est un  $U$  ouvert. Une telle application s'appelle un **champ de vecteurs** sur  $U$ .

### Exemple :

$y' = y$  Peut s'interpréter comme un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$ . L'application  $:(x, y) \mapsto (1, y)$  s'appelle un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$ .

## 1-2. Théorème D'existence et D'unicité

### Introduction :

Soient les Problèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = x \\ y(0) = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} xy' = y - 1 \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$$

$$1) \begin{cases} |y'| + |y| = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad 2) \quad 3)$$

Remarquons que : 1) n'admet pas des solutions ; 2) admet unique solution:  $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ ;  
3) admet infinité des solutions s'écrit sous la forme :  $y = 1 + cx, c \in \mathbb{R}$ .

**Sous quelles conditions le problème de Cauchy admet l'unique solution ?**

### **Théorème D'existence et D'unicité**

Dans tout ce paragraphe, on considère le problème de **Cauchy** :

$$(E) \dots \dots \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Où U un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  contenant le point  $(x_0, y_0)$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue,  $\Omega$  domaine fermé  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \subset U$ .

### **Les fonctions localement Lipschitzienne.**

**Déf.** Une fonction  $f$  définie dans U ; est dite localement Lipschitzienne par rapport à la variable  $y$  si pour tout  $(x_0, y_0)$ , il existe un voisinage V de  $(x_0, y_0)$  et une constante  $L(L(x_0, y_0)) \geq 0$  telle que :

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in V, \text{ on a: } |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

#### **Exemple1.**

$f(x, y) = x + y^2$ , on a :  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq 4|y_1 - y_2|$  sur :  $U = \mathbb{R} \times ]-2, 2[ = V(0, 0)$ .

Donc  $f$  est localement Lipschitzienne dans U.

#### **Exemple2.**

$f(x, y) = |y| \sin x$  .  $f$  - n'est pas dérivable par rapport à  $y$  au point  $(x_0, 0), x_0 \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ .

Mais la condition de **lipschitz** est remplie de ce point :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq |\sin x| ||y_1| - |y_2|| \leq L|y_1 - y_2|, \text{ avec}$$

$$L \geq 1$$

**Remarque.** Pour que  $f$  soit localement lipschitzienne en  $y$  sur U, il suffit que  $f$  admet une dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial y}$  continue sur U. Soit en effet  $L = \max_{(x, y) \in \Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$ .

**Lemme.** Une fonction  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution du problème de Cauchy si et seulement si :

(i)  $y$  est continue et  $(\forall x \in I)(x, y(x)) \in U$ ,

$$(ii) (\forall x \in I) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds.$$

**Dém :**

$\Rightarrow$

Par la relation  $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ , on déduit que  $y$  est continue sur  $I$ , puis par intégration on

a :

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$$

$\Leftarrow$

Inversement, on a la fonction  $:\varphi \quad t \mapsto f(t, y(t)) = \varphi(t)$  est continue sur  $I$ , donc  $y$  est dérivable sur  $I$

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x \varphi(s) ds$$

Donc  $y'(x) = \varphi(x)$  et  $y(x_0) = y_0$  c'est-à-dire  $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

**Théorème Cauchy-Lipschitz.** *Si  $f$  est continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable dans  $\Omega$ . Alors, (E) admet une solution au voisinage de  $x_0$  ( $]x_0 - h, x_0 + h[$ ,  $0 < h \leq a$ ). En particulier, pour toute telle donnée, il existe unique solution maximale associée et toute autre solution vérifiant la condition de **Cauchy** est une restriction de cette solution maximale.*

**Remarque.** Le théorème fournit les conditions suffisantes d'existence de l'unique solution du problème de Cauchy ; mais ces conditions ne sont pas nécessaires.

**Exemple 1.** Soit l'équation :

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y} = f(x, y) \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

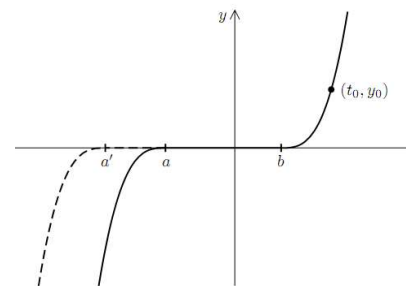
La fonction  $f$  n'est pas continue aux points  $(x_0, 0)$  de l'axe  $OX$ . Aussi  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{y^2}$  est discontinue sur l'axe  $OX$ . Mais elle admet l'unique solution :  $y^2 = 2(x - 1)$  ;  $y(1) = 0$ .

**Exemple 2.**

$$\begin{cases} y' = 3\sqrt[3]{y^2} = f(x, y) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{Définie est continue.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}} \xrightarrow{y \rightarrow 0} +\infty$$

Donc l'unicité n'est pas garantie aux points de l'axe  $OX$ .



$y = x^3$  Est une solution de l'équation, de plus  $y = 0$  est une solution évidente de l'équation donnée. On voit que pour tout point  $(x_0, 0)$  il passe une infinité de courbes intégrales.

### Démonstration (méthode du point fixe de Picard)

#### a) Existence de la solution

Considérons sur  $J = [x_0 - a, x_0 + a]$  la suite de fonction  $(\varphi_n(x))_n$  définie par la relation récurrente :

$$\begin{cases} \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_{n-1}(s)) ds \\ \varphi_0(x) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

La fonction  $f$  est continue sur  $\Omega$  fermé et borné, alors il existe une constante positive  $M$  telle que :

$$\forall (x, y) \in \Omega: |f(x, y)| \leq M \quad (2)$$

De la relation (1) on a :  $\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_0) ds$ , c'est clair que la fonction  $\varphi_1$  est vérifié :

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(s, y_0)| ds \leq M|x - x_0|$$

Posons :  $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$  on obtient :

$\varphi_1$  Définie et continue sur  $I = ]x_0 - h, x_0 + h[$ , et  $\forall x \in I (x, \varphi_1(x)) \in \Omega$ .

Supposons que la relation est vraie pour  $i \in \mathbb{N}$  c'est-à-dire :

- $\varphi_i$  est continue sur  $I = ]x_0 - h, x_0 + h[$ .
- $\forall x \in I: (x, \varphi_i(x)) \in \Omega$ .

Et on montre que cette relation est vraie pour  $(i + 1) \in \mathbb{N}$

De la relation (1), on a :

$$\varphi_{i+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_i(s)) ds \quad (3)$$

Il vient que  $\varphi_{i+1}(x)$  est bien définie et continue sur  $I$ . De plus :

$$|\varphi_{i+1}(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^x |f(s, \varphi_i(s))| ds \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b \quad (4)$$

Donc on déduit que :  $\forall x \in I: (x, \varphi_{i+1}(x)) \in \Omega$ .

## 2<sup>ème</sup> étape :

On montre par récurrence l'inégalité :

$$|\varphi(x)_{n+1} - \varphi_n(x)| \leq ML^n \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (\text{L. ie: la constante de Lipschitz}) \dots (5)$$

Si  $n=0$ , l'inégalité précédente est vraie, car,

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(s, y_0)| ds \leq M|x - x_0| \leq Mh.$$

Supposons que :

$$|\varphi(x)_n - \varphi_{n-1}(x)| \leq ML^{n-1} \frac{|x-x_0|^n}{(n)!}$$

On a:

$$\begin{aligned} |\varphi(x)_{n+1} - \varphi_n(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi_{n-1}(s))| ds \leq L \int_{x_0}^x |\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)| ds \\ &\leq ML^n \int_{x_0}^x \frac{|s-x_0|^n}{n!} ds \\ &= ML^n \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Finalement on obtient :

$$\forall x \in I: |\varphi(x)_{n+1} - \varphi_n(x)| \leq ML^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq ML^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

On pose :  $r_n(x) = \varphi(x)_{n+1} - \varphi_n(x)$  on obtient :

$$|r_n(x)| \leq \frac{M(Lh)^{n+1}}{L(n+1)!}$$

La série de terme générale  $\frac{M(Lh)^{n+1}}{L(n+1)!}$  est convergente vers  $\frac{M}{L} e^{Lh}$ , donc la série de terme générale  $r_n(x)$  converge uniformément sur  $I$  vers  $r(x)$  (critère de Weierstrass).

On a :

$$\sum_{i=0}^n r_i(x) = \varphi(x)_{n+1} - \varphi_0(x)$$

On déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = r(x) + \varphi_0(x). \quad \text{Posons : } r(x) + \varphi_0(x) = \varphi(x).$$

## 3<sup>ème</sup> étape :

Il reste maintenant à montrer que :

- La fonction  $\varphi(x)$  est continue,
- $\varphi(x)$  Une solution de l'équation (E).

On a :  $(\varphi_n(x))_n$  est continues sur I, alors  $(r_n(x))_n$  est aussi continues sur I, donc la fonction  $r(x)$  est continue sur I, on en déduire que  $\varphi(x)$  est continue.

D'après (4), on a :

$$|\varphi_{i+1}(x) - y_0| \leq Mh \leq b \quad (\text{Remarque : } \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_{i+1}(x) = \varphi(x))$$

Donc,  $\forall x \in I: (x, \varphi(x)) \in \Omega$ .

Puis :

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^x (f(s, \varphi(s)) - f(s, \varphi_n(s))) ds \right| &\leq \int_{x_0}^x |f(s, \varphi(s)) - f(s, \varphi_n(s))| ds \\ &\leq L \int_{x_0}^x |\varphi_n(s) - \varphi(s)| ds \\ &\leq Lh\varepsilon \quad (\text{Car : } (\varphi_n(x))_n \text{ est converge} \end{aligned}$$

uniformément sur I)

Donc :

$$\lim_n \int_{x_0}^x f(s, \varphi_n(s)) ds = \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds$$

D'après l'expression (3), on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_n \varphi_{n+1}(x) &= y_0 + \lim_n \int_{x_0}^x f(s, \varphi_n(s)) ds \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds \end{aligned}$$

D'où :

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds$$

## b) Unicité de la solution

**Lemme de Gronwall.** Soient  $v$  et  $u$  deux fonctions continues sur un segment  $I = [\alpha, \beta]$ , à valeurs positives. On donne un réel  $b \geq 0$ , tel que :

$$\forall x \in I, \quad u(x) \leq b + \int_{\alpha}^x u(s)v(s) ds$$

Alors :

$$\forall x \in I, \quad u(x) \leq b e^{\int_{\alpha}^x v(s) ds}$$

**Dém :**

Posons,

$$w(x) = b + \int_{\alpha}^x u(s)v(s) ds. \quad w(\alpha) = b$$

Donc  $u(x) \leq w(x)$ .

Par dérivation (si possible car,  $u, v$  sont continués) on trouve :

$$w'(x) = u(x)v(x),$$

On a:  $w'(x) = u(x)v(x) \leq v(x)w(x)$

Multiplions cette expression par  $e^{-\int_{\alpha}^x v(s)ds}$ , on obtient :

$$w'(x) e^{-\int_{\alpha}^x v(s)ds} - v(x)w(x) e^{-\int_{\alpha}^x v(s)ds} \leq 0$$

C'est-à-dire :

$$\left( w(x) e^{-\int_{\alpha}^x v(s)ds} \right)' \leq 0, \text{ donc}$$

$$w(x) e^{-\int_{\alpha}^x v(s)ds} - b \leq 0$$

Alors on obtient :

$$u(x) \leq b e^{\int_{\alpha}^x v(s)ds} \text{ car, } u(x) \leq w(x)$$

Supposons que le problème admet deux solutions  $y_1, y_2$ . Donc :

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(s, y_1(s)) ds - \int_{x_0}^x f(s, y_2(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds \\ &\leq L \int_{x_0}^x |y_1(s) - y_2(s)| ds \end{aligned}$$

En utilisant le lemme précédant pour

$$u(x) = |y_1(x) - y_2(x)|, v(x) = L, b = 0$$

On trouve :

$$u(x) \leq 0 + \int_{x_0}^x L \cdot u(s) ds$$

Alors :

$$u(x) \leq 0 \Rightarrow u(x) = 0$$

**Corollaire.** Soient  $y_1, y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux solutions de (E), avec  $f$  localement lipschitzienne en  $y$ . Si  $y_1$  et  $y_2$  coïncident en un point de  $I$ , alors  $y_1 = y_2$  sur  $I$ .

-Il en résulte que deux solutions  $(I, \varphi)$  et  $(J, \theta)$  de même condition initiale  $y(x_0) = y_0$  sont égales sur

$L'$ intersection de leurs domaines  $I \cap J$ .

**Interprétation géométrique.** - Le théorème d'unicité signifie géométriquement que des courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper. **(Exercice).**

**Corollaire. Solutions maximales.**

Considérons pour finir l'ensemble des toutes les solutions de l'équation de condition initiale  $y(x_0) = y_0$ . Soit  $I$  la réunion de tous les intervalles de définition de ces solutions, et soit  $\psi$  la fonction définie sur  $I$  par  $\psi(x) = \varphi(x)$ , où  $\varphi$  est l'une quelconque des solutions de notre ensemble, dont le domaine de définition contient  $x$ . Alors  $\psi$  est bien définie, car deux solutions de même condition initiale sont égales sur l'intersection de leurs domaines. De plus  $(I, \psi)$  est clairement une solution maximale de (E). Ceci termine la démonstration du théorème de Cauchy - Lipschitz.

**Remarque1.** La condition de Lipschitz est essentielle pour l'unicité de solution de problème de Cauchy avec la condition initiale.

**Remarque2.** La méthode précédente est dite la méthode du point fixe de **Picard**.

**L'unicité globale.** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue sur un ouvert  $U = J \times \mathbb{R}$ , où  $J \subset \mathbb{R}$  est un intervalle ouvert.

S'il existe une fonction continue  $k : J \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que pour tout  $x \in J$  fixé, l'application :

$$y \mapsto f(x, y) \text{ soit lipschitzienne de rapport } k(x) \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Alors toute solution maximale de l'équation différentielle  $y' = f(x, y)$  est globale (c'est-à-dire définie sur  $J$  tout entier). **(Exercice)**

**Exemple.**

$$\begin{cases} y' = 2x(1 + y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$y(x) = e^{x^2} - 1$  est la seule solution du problème sur  $\mathbb{R}$ . ( remarque que  $f(x, y) = 2x(1 + y)$  est lipschitzienne de rapport  $k(x) = |2x|$  sur  $\mathbb{R}$ ).

**Méthode d'approximation successive (méthode de Picard).**

$$\text{Soit le problème (E): } \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Supposons sur l'ouvert :  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$  le problème satisfait les conditions du théorème de **Cauchy-Lipschitz** (l'existence et l'unicité de la solution).

La suite  $(y_n(x))_n$  de fonction définie par la relation récurrente :

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds \end{cases}$$

Convergente vers la solution exacte de (E) dans l'intervalle  $]x_0 - h, x_0 + h[$  .

De plus l'erreur obtenue par cette approximation vérifie :

$$|y(x) - y_n(x)| \leq ML^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} e^{Lh}$$

**Dém :**

Commençons par l'inégalité (5):

$$\begin{aligned} |y(x)_m - y_n(x)| &= \left| \sum_{p=n}^{m-1} (y(x)_p - y_{p+1}(x)) \right| \\ &\leq \sum_{p=n}^{m-1} |y(x)_p - y_{p+1}(x)| \\ &\leq \sum_{p=n}^{m-1} ML^p \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \\ &\leq ML^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{p=n}^{m-1} L^{p-n} \frac{h^{p-n}}{(p-n)!} \\ &= ML^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{r=0}^{m-n-1} \frac{(Lh)^r}{(r)!} \end{aligned}$$

Mais :

$$\lim_m y_m(x) = y(x), \quad \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(Lh)^r}{(r)!} = e^{Lh}$$

On déduit :

$$|y(x) - y_n(x)| \leq ML^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} e^{Lh}$$

**Exemple1.**

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , et on a  $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ .

Il est évident que les conditions du théorème de **Cauchy-Lipschitz** satisfaites pour cette équation dans tout  $\mathbb{R}^2$ .

On a:  $y_n(x) = y_0 + \int_0^x f(s, y_{n-1}(s)) ds = y_0 + \int_0^x y_{n-1}(s) ds$ .

Donc :

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = 1 + \int_0^x y_0(s) ds = 1 + x \\ y_2 = 1 + \int_0^x y_1(s) ds = 1 + x + \frac{x^2}{2} \\ y_3 = 1 + \int_0^x y_2(s) ds = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \end{cases}$$

Et en générale :

$$y_n(x) = y_0 + \int_0^x y_{n-1}(s) ds = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Il est clair que  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e^x$

**Exemple2.**

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{Sur } U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

On a:  $|f(x, y)| \leq 2 \Rightarrow M = 2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ .

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \min\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Donc les approximations successives convergentes dans l'intervalle  $|x| < \frac{1}{2}$ .

$$y_n(x) = y_0 + \int_0^x f(s, y_{n-1}(s)) ds = \int_0^x (s^2 + y_{n-1}^2(s)) ds$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{x^3}{3} \\ y_2 = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \\ y_3 = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59335} \end{cases}$$

L'erreur absolue du 3<sup>ième</sup> ordre ne dépasse pas la valeur :  $|y(x) - y_3(x)| \leq ML^3 \frac{h^4}{24} e^{Lh}$

On a :  $M = 2$ ,  $L = 2$ ,  $h = 0.5$  donc :

$$|y(x) - y_3(x)| \leq \frac{e}{24}.$$

## Chapitre II : Méthodes de résolutions

### 2-1 Eq.diff. À variables séparées.

**Définition.** Une équation différentielle de 1er ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme :

$$f(y)y' = g(x)$$

Une telle équation différentielle peut s'intégrer facilement : En effet, on écrit  $y' = \frac{dy}{dx}$ .

$$f(y)dy = g(x)dx \Leftrightarrow \int f(y)dy = \int g(x)dx + C$$

Il s'agit donc d'abord de trouver des primitives F et G de f et de g, et ensuite d'exprimer y en terme de x (et de C) :

$$F(y) = G(x) + C \Leftrightarrow y = F^{-1}(G(x) + C)$$

C'est pour cette raison que l'on dit aussi < intégrer > pour < résoudre > une équation différentielle.

#### Exemple1.

$$\begin{aligned}y' &= x^2 y^3 \\y' = x^2 y^3 &\Rightarrow \frac{dy}{y^3} = x^2 dx \\&\Rightarrow \frac{-1}{2y^2} = \frac{x^3}{3} + C\end{aligned}$$

#### Exemple2.

$$t(x^2 - 1)dt - xe^{-t^2} dx = 0$$

Séparons les variables en divisant par  $(x^2 - 1)e^{-t^2}$ , il vient :

$$te^{t^2} dt - \frac{x}{x^2 - 1} dx = 0, x \neq 1, x \neq -1$$

Après l'intégration de deux termes de cette équation, on trouve :

$$e^{t^2} - \ln|x^2 - 1| = C$$

Donc la solution générale de l'équation s'écrit comme suit :

$$e^{t^2} - \ln|x^2 - 1| = C, \quad x = 1, \quad x = -1$$

### Équations se ramènent à des équations à variable séparables :

Les équations de la forme :

$$y' = f(ay + bx + c) \dots (1)$$

Posons :  $ay + bx + c = z$ , donc :

$$z' = ay' + b \dots (2)$$

Remplaçons cette expression dans (1) on obtient :

$$z' = af(z) + b$$

Alors :

$$\frac{dz}{af(z) + b} = dx$$

**Exemple.**

$$y' = x + y - 1.$$

Posons :  $y + x - 1 = z$ , on obtient :

$$\frac{dz}{z + 1} = dx \quad (\text{avec: } z + 1 \neq 0)$$

Donc :

$$z = -1 + ke^x; \quad \text{avec } k \neq 0$$

D'où la solution générale :  $y = -x + ke^x$

## 2.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Ce sont les équations de la forme :

$$(L_1) \quad y' + a(x)y = b(x)$$

Où  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues.

A cette équation on peut associer l'équation  $(E_0) : y' + a(x)y = 0$

$(E_0)$  : dite l'équation homogène associée.

**Proposition.** Les solutions maximales de  $(E_0)$  forment un sous espace vectoriel de dimension 1 des fonctions  $C^1(I)$ , ayant pour base  $x \mapsto e^{-\int a(x)dx}$ .

**Dém :**

Il est clair que les conditions du théorème de **Cauchy-Lipschitz** satisfaites pour cette équation sur  $I$  (on a ici :  $f(x, y) = -a(x)y$ ), donc le problème  $\begin{cases} y' = -a(x)y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  admet unique solution sur  $I$ .

En effet,  $(E_0)$  est une équation différentielle à var. séparées, en l'écrivant :  $\frac{y'}{y} = -a(x)$ .

En intégrant, on obtient :  $y(x) = Ke^{-\int a(x)dx}$ ,  $K^{cte} \in \mathbb{R}$ .

Posons :  $\varphi(x) = e^{-\int a(x)dx}$  et  $S_0 = \{y_k / y_k = K\varphi(x), K^{cte} \in \mathbb{R}\}$ , alors :  $S_0 \subset C^1(I)$ .

Soient  $y_1, y_2 \in S_0$ .

On vérifie que  $y_1 + y_2 \in S_0$ , et  $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha y_2 \in S_0$ , donc  $S_0$  c'est un s.e.v.

De plus on a :  $S_0 = \langle \varphi \rangle$ .

**Remarque.** Supposons qu'on connaisse une solution particulière  $y_1$  de l'équation  $(E)$ . Si  $z$  est solution de  $(E_0)$ , alors  $y = y_1 + z$  est solution de  $(E)$ .

**Exemple.**

$$y' + 2xy = 3x.$$

On a  $y = \frac{3}{2}$  une solution évidente de  $(E)$ , mais la solution générale de  $(E_0)$ , est :

$$z(x) = Ke^{-x^2}, K^{cte} \in \mathbb{R},$$

Donc la solution générale de cette équation est :

$$y(x) = \frac{3}{2} + Ke^{-x^2}, K^{cte} \in \mathbb{R}$$

**Théorème.** Soient  $A$  une primitive de  $a$ , et  $B$  une primitive de  $be^A$ . Alors la solution générale de l'équation  $(E)$  est :

$$y(x) = e^{-A(x)}(K + B(x)),$$

où  $K$  est une constante réelle.

**Dém :**

**1-Résolution de l'équation homogène associée :**

D'après la proposition précédente la solution générale de  $(E_0)$  s'écrit comme suit :  $z(x) = Ke^{-A(x)}$ .

**2-Solution particulière :**

On cherche la solution particulière sous la forme :  $y_1(x) = K(x)e^{-A(x)}$ , avec  $K$  une fonction à déterminer (par la méthode : *variation de la constante*). On trouve :

$$K'(x) = b(x)e^{A(x)} \Leftrightarrow K(x) = \int b(x)e^{A(x)} dx = B(x).$$

Une solution particulière est donc :

$$y_1(x) = e^{-A(x)}B(x),$$

Et la solution générale est donc :

$$y(x) = z(x) + y_1(x) = e^{-A(x)}(K + B(x)), \quad K^{ct} \in \mathbb{R}$$

**Exemple.**

$$y' - \frac{y}{x} = x \sin x,$$

L'équation homogène associée ( $E_0$ ) :  $y' - \frac{y}{x} = 0$ ,

On a la solution générale de ( $E_0$ ), est :  $z(x) = Kx$ ,  $K^{ct} \in \mathbb{R}$ .

On cherche une solution particulière par la méthode de *variation de la constante* on obtient :

$$K(x) = \int b(x)e^{A(x)} dx = \int x \sin x \cdot e^{-\ln x} dx = -x \cos x,$$

Donc

$$y_1(x) = e^{-A(x)}B(x) = -x \cos x.$$

Alors la solution générale de cette équation :

$$y(x) = Kx - x \cos x, \quad K^{ct} \in \mathbb{R}.$$

**Recherche d'une solution particulière dans certains cas.**

Soient  $a, \mu \in \mathbb{R}$  et  $p$  un polynôme de degré  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Equations de la forme:**  $y' + ay = p(x)e^{\mu x}$ .

Pour ce type d'équation, une solution particulière peut être cherchée sous la forme  $x \rightarrow q(x)e^{\mu x}$ , où  $q$  est un polynôme de degré :

- 1) inférieur ou égal à  $n$  si  $\mu \neq -a$  ;
- 2) inférieur ou égal à  $(n + 1)$  si  $\mu = -a$ .

- **Si équations de la forme (2) ...**  $y' + ay = p(x)\cos(\mu x)$  ou **(3) ...**  $y' + ay = p(x)\sin(\mu x)$ :

Pour trouver une solution particulière de ce type d'équation, on commence par chercher une solution particulière complexe  $y_c$  de l'équation **complexe**  $y' + ay = p(x)e^{i\mu x}$ ; on applique pour cela la méthode décrite à l'instant en introduisant une

fonction polynomiale à coefficients **complexes**.

On remarque alors que  $Re(y_c)$  est une solution particulière de (2) et que  $Im(y_c)$  est une solution particulière de l'équation (3).

- **Si équations de la forme (4) ...  $y' + ay = p(x)ch(\mu x)$  ou (5) ...  $y' + ay = p(x)sh(\mu x)$**

Pour trouver une solution particulière de ce type d'équation, on commence par chercher une solution particulière  $y^+$  de l'équation :  $y' + ay = p(x)e^{\mu x}$ , est une solution particulière  $y^-$  de l'équation :  $y' + ay = p(x)e^{-\mu x}$ . Alors :  $\frac{y^+ + y^-}{2}$  est une solution particulière de (4) et  $\frac{y^+ - y^-}{2}$  est une solution particulière de l'équation (5).

**Exp1.**  $y' + 2y = 2xe^x + e^{-2x} \dots (1)$

**Résolution de (EH).** Les solutions sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions :  $z(x) = ke^{-2x}, k^{ct} \in \mathbb{R}$ .

Recherche d'une solution particulière de  $y' + 2y = 2xe^x$ , sous la forme :  $y_1 = (ax + b)e^x$  où  $a, b \in \mathbb{R}$ . On trouve :  $y_1 = \left(\frac{3x-1}{9}\right)e^x$ . En même raison cherchons une solution particulière de  $y' + 2y = e^{-2x}$ , on trouve :  $y_2 = xe^{-2x}$ . donc la SG de (1) sont :

$$y(x) = \frac{3x-1}{9}e^x + (x+k)e^{-2x}, \quad k^{ct} \in \mathbb{R}.$$

**Exp2.**  $y' - y = \sin x \dots (2)$

**Résolution de (EH).** Les solutions sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions :  $z(x) = ke^x, k^{ct} \in \mathbb{R}$ .

Recherche d'une solution particulière de  $y' - y = e^{ix}$ , sous la forme :  $y_1 = ae^{ix}$ , où  $a \in \mathbb{C}$ .

On trouve :  $y_1 = \left(-\frac{i+1}{2}\right)e^{ix}, Im(y_1) = -\frac{\sin x + \cos x}{2}$ , donc la SG de (2) sont :

$$y(x) = ke^x - \frac{\sin x + \cos x}{2}, \quad k^{ct} \in \mathbb{R}.$$

## 2-3 Équations se ramènent à des linéaires

### a) Équations de Bernoulli.

Ce sont les équations de la forme :

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha, \quad \alpha \neq 1$$

Où  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues (pour  $\alpha = 1$ , (E) est linéaire).

On se place dans le demi-plan supérieur  $U = \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ = \{(x, y); y > 0\}$ . En multipliant par  $y^{-\alpha}$ , on obtient :

$$(E) \Leftrightarrow y^{-\alpha}y' = a(x)y^{1-\alpha} + b(x)$$

Posons  $z = y^{1-\alpha}$ ; alors  $z' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}y'$ , d'où

$$(E) \Leftrightarrow z' = (1 - \alpha)a(x)z + (1 - \alpha)b(x).$$

On est donc ramené à une équation linéaire en  $z$ .

**Exemple.**

$$(1) \quad y' - xy = -xy^3$$

C'est une équation de Bernoulli

$$\text{Si } y \neq 0: \quad (E) \Leftrightarrow \frac{y'}{y^3} - \frac{x}{y^2} = -x$$

Posons  $z = y^{-2}$ ; alors  $z' = -2y^{-3}y'$ , d'où :  $z' + 2xz = 2x \dots$  (2) équation linéaire.

On remarque que  $z = 1$  est une solution particulière de (2), alors la solution générale de (2) s'écrit comme :

$$z(x) = 1 + Ke^{-x^2}, \quad K^{ct} \in \mathbb{R}^*,$$

Donc la solution générale de (E) :  $\frac{1}{y^2} = 1 + Ke^{-x^2}$ , alors :  $y(x) = \mp \sqrt{\frac{1}{1+Ke^{-x^2}}}$ ,  $K^{ct} \in \mathbb{R}^*$ .

Finalement la solution générale de (1) :  $y(x) = 0$ ;  $y(x) = \mp \sqrt{\frac{1}{1+Ke^{-x^2}}}$ ,  $K^{ct} \in \mathbb{R}$ .

## b) Equations de Riccati.

On appelle équation de Riccati toute équation différentielle de la forme :

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

Avec  $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues, c'est-à-dire que  $f(x, y)$  est un polynôme de degré  $\leq 2$  en  $y$ .

### Transformation d'une équation de Riccati à une équation linéaire :

Cette méthode basée sur :

- Connaissions une solution particulière  $y_1$  d'équation de **Riccati**.
- Substituons le changement de variable :

$$y = z + y_1$$

Puis :

$$w = z^{-1}$$

**Exemple.** (1)  $y' + \frac{y}{x} - y^2 = \frac{-1}{x^2}$

On remarque que :  $y_1 = \frac{1}{x}$

est une solution particulière de (1), soit le changement de variable :

$$y = \frac{1}{x} + z$$

Donc :  $y' = -\frac{1}{x^2} + z'$

$$(1) \Rightarrow z' - \frac{z}{x} = z^2 \dots (2)$$

(2) est une équation de **Bernoulli**, donc en multipliant par  $z^{-2}$  ( dans le cas  $z \neq 0$ ) on obtient :

$$\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{zx} = 1$$

Posons  $w = z^{-1}$ ; alors  $w' = \frac{-z'}{z^2}$ , d'où :

$$(3) \dots w' + \frac{1}{x}w = -1.$$

On est donc ramené à une équation linéaire en  $w$ .

On remarque que :  $w = -\frac{1}{2}x$ ,

Est une solution particulière de (3), alors la solution générale de (3) s'écrit c comme :

$$w(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{K}{x}, \quad K^{ct} \in \mathbb{R}.$$

Dans le 1<sup>er</sup> cas  $z = 0$  on a  $y = \frac{1}{x}$  est une solution particulière de (1).

Finalement la solution générale de (1) :

$$y = \frac{1}{x} ; \quad y(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{\frac{1}{2}x^2 - K}, \quad K^{ct} \in \mathbb{R}.$$

### C) Equations Homogènes.

Une équation homogène est une équation qui peut se mettre sous la forme :

$$(E) \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{où } f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ est continue.}$$

Méthode – On pose  $z = \frac{y}{x}$ , c'est-à-dire  $y = xz$ . Il vient

$$y' = z + xz' = f(z),$$

Donc  $z$  satisfait l'équation à variables séparées :

$$x \frac{dz}{dx} = f(z) - z$$

Pour  $f(z) \neq z$  on peut écrire :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{f(z) - z}.$$

**Exemple-** L'équation (E)... $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$  peut se récrire :

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}, x \neq 0,$$

On pose  $z = \frac{y}{x}$ , alors : (E)  $\Leftrightarrow z + xz' = \sqrt{1 - z^2} + z$ .

Donc :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad z \neq \pm 1$$

Dans le cas  $|z| < 1$ , on trouve :

$$\arcsin z = \ln|x| + \lambda, \lambda^{ct} \in \mathbb{R},$$

Les (SG) de (E) dans  $]0; +\infty[$  ou  $]-\infty; 0[$  est :

$$z = \pm 1, \text{ donc } y = \pm x$$

$$z = \sin(\ln|x| + \lambda) \text{ donc } y(x) = x \sin(\ln|x| + \lambda), \quad \lambda^{ct} \in \mathbb{R}.$$

### Équations se ramènent à des équations Homogène

Soit l'équation de la forme :

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \delta}\right) \quad (E)$$

i) Si  $c = \delta = 0$ , (E) c'est une équation-H.

ii) Si  $c$  ou  $\delta \neq 0$

- *Premier cas*

Si le déterminant  $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0$ , l'équation (E) se ramène à une équation-H.

En effet, faisons le changement de variable suivant :  $\begin{cases} x = t + x_0 \\ y = h + y_0 \end{cases}$  où  $x_0, y_0$  sont les

racines du système  $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ \alpha x + \beta y + \delta = 0 \end{cases}$ .

- *Deuxième cas*

Si le déterminant  $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$ . L'équation (E) se ramène à une équation-Var-séparée.

**Exemple.**  $y' = \frac{y-x}{2y-x+1} \quad \dots (1)$

Soit le système  $\begin{cases} y - x = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$ , ce système admet une solution :  $x_0 = -1, y_0 = -1$ .

On pose  $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = h - 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dh}{dt}$ .

$$(1) \Leftrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{h-t}{2h-t} \dots (2)$$

(2) c'est une équation-H, on pose  $z = \frac{h}{t}$ , d'où :

$$z + tz' = \frac{z-1}{2z-1} \dots (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow t \frac{dz}{dt} = -\frac{2z^2 - 2z + 1}{2z - 1}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{dt}{t} = \frac{2z-1}{2z^2-2z+1} dz \dots (4)$$

Après l'intégration des deux membres de l'équation à variables séparées précédente, on trouve :

$$-\ln|t| + c = \frac{1}{2} \ln|2z^2 - 2z + 1|, c^{ct} \in \mathbb{R}^*,$$

Donc :

$$\frac{1}{2} \ln|2h^2 - 2ht + t^2| = c, c^{ct} \in \mathbb{R}^*.$$

Substituons la valeur de  $z = \frac{h}{t}$ , on obtient :

$$\ln \sqrt{2h^2 - 2ht + t^2} = c, c^{ct} \in \mathbb{R}^*.$$

En fin la SG en  $x$  et en  $y$ , d'où il vient :

$$\ln \sqrt{(y+1)^2 + (y-x)^2} = c, c^{ct} \in \mathbb{R}^*.$$

## Exercices.

### التمرين الأول.

في كل حالة من الحالات الآتية أوجد المعادلة التفاضلية المناسبة لمجموعة المنحنىات :

$$y = \rho \cos x, \quad \rho(y+1)^2 = x, \quad y = \rho e^{\frac{x}{\rho}}, \quad y = \rho_1 x + \rho_2 x^2$$

### التمرين الثاني.

حل المعادلات التفاضلية التالية:

$$y' = \frac{-x}{y}, \quad x y' = y + y^2, \quad y' = 2x(1 + y^2)$$

- برر دون حساب وجود ووحدانية الحل لكل مسألة من المسائل التالية:

$$1) \begin{cases} y' = \frac{-x}{y} \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y' = 2x(1 + y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x y' = y + y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

أحسب صراحة الحل الأعظمي لكل مسألة من المسائل السابقة.

### التمرين الثالث.

الدوال التالية هل هي محلية ليبشترزيان بالنسبة للمتغير الثاني على الميادين المعطاة:

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^4, \quad |x| \leq 1, |y| \leq 3, \quad f(x, y) = x \sin y + y \cos x, \quad |x| \leq a, |y| \leq b$$
$$g(x, y) = 1 + x^2 y^2 + xy, \quad |x| \leq a, |y| \leq b, \quad h(x, y) = x^3 e^{-xy^2}, \quad 0 \leq x \leq a, |y| \leq \infty$$

### التمرين الرابع.

في كل مسألة من مسائل كوشي الآتية، أدرس وجود ووحدانية الحل في جوار  $x_0$  (ثم الحل الأعظمي)

$$(1) \begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} y' = e^x + \frac{x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} y' = 3|y|^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

### التمرين الخامس.

- أكتب المعادلات التكاملية المرافقة لكل من:

$$1) \begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y' = \cos y \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- أنشئ متتالية التقريبات المتعاقبة لكل مسألة، هل تتقارب هذه المتتاليات؟

### التمرين السادس.

على المستطيل:  $R = \{(x, y) / |x| \leq \frac{1}{2}; |y| \leq 1\}$  بين أن المسألة:

$$\begin{cases} y' = x^2 y^2 + e^{-y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

تتمتع بحل وحيد على مجال  $I$  يطلب تعيينه.

### التمرين السابع.

على المستطيل:  $R = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1; |y| \leq 1\}$  بين أن المسألة:

$$\begin{cases} y' = x + e^{-x} + e^{-y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

تتمتع بحل وحيد على مجال  $I$  يطلب تعيينه. هل يمكن تمديد هذا الحل؟

### التمرين الثامن.

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية:  $(E) \quad y' = \sin y$

(a) ماهي الدوال الثابتة التي تمثل حلاً لـ  $(E)$ ؟

(b) ليكن  $\varphi$  حلاً أعظمية يحقق  $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$ . أثبت أن  $\varphi$  محدود ورتيب

- أثبت أن:  $\varphi(x) = \pi - \varphi(-x)$ .

- أوجد عبارة  $\varphi$ ؛ ثم أعد النتائج السابقة عن طريق الحساب؛

- أنشئ المنحني البياني  $(\mathcal{J})$  لـ  $\varphi$ . هل يقبل مركز تناظر.

### التمرين التاسع.

نعتبر المسألة التالية:

$$\begin{cases} y' = 1 + x^2 y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

- بر وجود ووحدية الحل الأعظمي  $\varphi$  للمسألة، معرف على مجال مفتوح  $I$ .
- أثبت أنه فردي ورتيب على  $I$ .

- أثبت أن  $I$  محدود على  $\mathbb{R}$ . نضع:  $b = \sup I$ ، أحسب:  $\lim_{x \rightarrow b} \varphi(x)$

### التمرين العاشر.

نعتبر المسألة التالية:

$$\begin{cases} y' = \cos(xy) \\ y(0) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- بر وجود ووحدية الحل الأعظمي  $y$  للمسألة.
- بملاحظة أن:

$$y(x) = \alpha + \int_0^x \cos(ty(t)) dt$$

أثبت أن  $y$  معرف على  $\mathbb{R}$

### التمرين الحادي عشر.

- نعتبر المعادلة التفاضلية التالية:  $y' = x\sqrt{x^2 + y^2}$
- أثبت أن كل حل أعظمي هو حل شامل

### التمرين الثاني عشر.

- $a, b$  تابعين معرفين ومستمرين على مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$ . نعتبر مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- بر أنها تتمتع بحل وحيد (يطلب تعيين صيغته العامة أولاً ثم الخاصة) على المجال  $I$ .
- باستعمال هذه الصيغة أوجد حلول المسائل والمعادلات التفاضلية الآتية:

$$1) y' + 2y = e^{-x} \quad 2) y' + y = x^2 + \cos x. \quad 3) xy' + 2y = e^x$$

$$4) \begin{cases} y' + 2xy = x \\ y(1) = 2 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} xy' + y = \sin x, x > 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

### التمرين الثالث عشر.

- حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$$xy' - y = \frac{2x + 1}{x^2 + 1}$$

- هل توجد حلول معرفة على  $\mathbb{R}$ ؟

### التمرين الرابع عشر.

- حل المعادلات التفاضلية التالية (بعد تحديد صنفها، وطريقة حلها):

$$x^2 y' = \frac{x^2 + 1}{3y^2 + 1}; \quad y' = xy + x - 2y - 2; \quad y' \sin x = y \ln y$$

$$(1 + x^2)dt + (1 + t^2)dx = 0; \quad x' = \sqrt{x + t + 1}; \quad x' = \cos(x - t)$$

$$y' = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2; \quad (1 - x^3)y' + x^2y + y^2 = 2x; \quad x^2 y' = xy - y^2$$

$$(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$$

### Correction de l'exercice n°9.

$$\begin{cases} y' = 1 + x^2 y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$f(x, y) = 1 + x^2 y^2$  est définie et de classe  $C^1$  sur l'ouvert  $U = \mathbb{R}^2$ . Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce problème admet une solution maximale définie sur un intervalle ouvert  $I$  contenant 0 :  $I = ]a, b[$  avec  $a < 0 < b, a, b \in \mathbb{R}$

#### Monotonie

$y$  est dérivable et  $\forall x \in I, y'(x) \geq 1 > 0$ .  
La fonction  $y$  est strictement croissante sur  $I$ .

#### Parité

Considérons  $z: x \in J \mapsto -y(-x)$  avec  $J = ]-b, -a[$ .  
 $z(0) = -y(0) = 0, z$  est dérivable et  $z'(x) = y'(-x) = 1 + (-x)^2 y(-x)^2 = 1 + x^2 z^2$   
Ainsi  $z$  est solution du problème de Cauchy définissant la solution maximale  $y$  et donc  $z$  est une restriction de  $y$ . On en déduit  $J \subset I$  et  $\forall x \in J, z(x) = y(x)$ . Or  $J \subset I$  donne  $]-b, -a[ \subset ]a, b[$  d'où l'on tire  $a = b$ . Par suite  $I = J = ]-b, b[$  et  $\forall x \in I, y(-x) = -y(x)$ . Finalement  $y$  est une fonction impaire.

#### Montrons que $I$ borné.

Par l'absurde si  $b = +\infty$  alors pour

$$x \geq 1, \quad y'(x) \geq 1 + y(x)^2$$

Et donc :

$$\frac{y'(x)}{1 + y(x)^2} \geq 1$$

En intégrant,

$$\int \frac{y'(t)}{1 + y(t)^2} \geq \int 1 dt$$

Puis  $\arctan(y(x)) - \arctan(y(1)) \geq x - 1$

Ce qui est absurde. On conclut  $b < +\infty$ .

#### Etude de la limite de $y$ en $b_-$

Puisque  $y$  est croissante, la limite  $\ell$  de  $y$  en  $b_-$  existe dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

Par l'absurde supposons  $\ell \in \mathbb{R}$ .

On peut alors introduire  $\tilde{y}: ]-b, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\tilde{y}(x) = y(x)$  si  $x < b$  et

$$y\tilde{(b)} = \ell.$$

$y\tilde{}$  est solution de E sur  $] - b, b [$ .

Par construction  $y\tilde{}$  est continue en b et quand  $x \rightarrow b -$ ,

$$y\tilde{'}(x) = 1 + x^2 y\tilde{(x)}^2 \rightarrow 1 + b^2 \ell^2 \in \mathbb{R}.$$

Par suite  $y\tilde{}$  est dérivable en b et  $y\tilde{'}(b) = 1 + b^2 \ell^2 = 1 + b^2 y\tilde{(b)}^2$

Ainsi  $y\tilde{}$  est solution sur  $] - b, b [$  du problème de Cauchy initial ce qui contredit la maximalité de y. Absurde. On en déduit  $\lim_b y = +\infty$ .

## الامتحان 1. 2024/2023

1. حل المعادلات التفاضلية التالية:

$$(1 + x^2)y' + xy = 1$$

$$x^2 y' = x^2 + y^2 - xy$$

2. أوجد حلا خاصا للمعادلة التفاضلية التالية:

$$2y' \cos x + \sin^2 x = y^2 + 2\cos^2 x$$

- ماهو نوع هذه المعادلة، أوجد عبارة الحل العام لها.

I. نعتبر مسألة كوشي التالية:

$$(E) \dots \begin{cases} y' = f(t, y) = e^{-ty} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

- أثبت أن هذه المسألة تقبل حلاً وحيداً أعظماً  $\varphi$ ؛

- تحقق أن التابع  $\varphi$  فردي ومتزايد تماماً؛

- أثبت أن  $\varphi$  معرف على  $\mathbb{R}$  ومحدود؛

- أثبت أن  $\varphi$  يملك نهاية منتهية  $l$  عند  $+\infty$  حيث  $l > 1$ .

II. نعتبر مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} y' = y - t \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

- أنشئ متتالية التقريبات المتعاقبة لهذه المسألة (ذكر بأهم مراحلها)، برر تقارب هذه المتتالية نحو الحل الدقيق

- أحسب التقريبات الثلاثة الأولى للحل، ثم إستنتج عبارة الحل الدقيق.

## الحل

### التمرين الأول

$$1) (1 + x^2)y' + xy = 1$$

معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى، حيث لدينا:

$$a(x) = \frac{x}{1 + x^2}, \quad b(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

لدينا حسب المحاضرة:

$$A(x) = \int \frac{x}{1 + x^2} dx, \quad B(x) = \int b(x)e^{A(x)} dx$$

وبعد المكاملة نجد:

$$A(x) = \int \frac{x}{1 + x^2} dx = \ln \sqrt{x^2 + 1},$$

$$B(x) = \int b(x)e^{A(x)} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \text{Argsh}(x)$$

وأخيرا نجد:

$$y(x) = (k + B(x))e^{-A(x)} = \frac{k + \text{Argsh}(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad k^{cte} \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad x^2 y' = x^2 + y^2 - xy$$

$$(2) \Leftrightarrow y' = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} \quad x \neq 0$$

وهي معادلة متجانسة، لذلك نضع:  $z = \frac{y}{x}$ ، أي:  $y = xz$

$$y' = z + xz'$$

المعادلة تتحول إلى:

$$z + xz' = 1 + z^2 - z$$

ومنه:

$$\frac{dz}{(z-1)^2} = \frac{dx}{x}; \quad z \neq 1$$

معادلة ذات متغيرات منفصلة. بعد المكاملة لطرفي المعادلة، نجد:

$$\frac{-1}{z-1} = \ln|x| + c, \quad c^{cte} \in \mathbb{R}.$$

أخيرا نجد:

$$z = \frac{-1}{\ln|x| + c} + 1, c^{cte} \in \mathbb{R},$$

ومنه:

$$\begin{cases} y = \frac{-x}{\ln|x| + c} + x / c^{cte} \in \mathbb{R}, \\ \text{أو } y = x (z = 1) \end{cases}$$

$$3) 2y' \cos x + \sin^2 x = y^2 + 2\cos^2 x$$

يمكن بسهولة ملاحظة أن التابع  $y = \sin x$  هو حل خاص لهذه المعادلة، يكفي التعويض لنجد المطلوب. هذه المعادلة هي من الشكل:

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

$$y' = \frac{1}{2\cos x} y^2 + \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x}{2\cos x}$$

وهي معادلة ريكاتي.

لحل هذه المعادلة تتبع الخطوات التالية:

- نضع:  $y = z + \sin x$  حيث تتحول هذه المعادلة إلى معادلة برنولي  
- ثم نضع:

$$w = \frac{1}{z}$$

لتصبح في الأخير معادلة خطية، كما يلي:

$$2(z' + \cos x)\cos x + \sin^2 x = (z - \sin x)^2 + 2\cos^2 x \Rightarrow 2z' \cos x = z^2 - 2z \sin x \dots (1)$$

المعادلة (1) هي معادلة لبرنولي، لنضع الآن:  $w = \frac{1}{z}$  وهذا يؤدي إلى:  $w' = \frac{-z'}{z^2}$ . المعادلة (1) تصبح:

$$\frac{2z'}{z^2} \cos x - \frac{2}{z} \sin x = 1 \Rightarrow -2w' \cos x - 2w \sin x = 1 \dots (2)$$

المعادلة (2) هي معادلة خطية في  $w$ .

$$A(x) = \int a(x) dx = \int \tan x dx = -\ln|\cos x|$$

$$B(x) = \int b(x)e^{A(x)} dx = \int \frac{1}{-2\cos^2 x} dx = \frac{-1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\frac{1}{2} \tan x$$

وعليه نجد:

$$w(x) = (k + B(x))e^{-A(x)} = k \cos x - \frac{1}{2} \sin x, \quad k^{cte} \in \mathbb{R}$$

ونستنتج عبارة  $Z$  كما يلي:

$$z(x) = \frac{1}{k \cos x - \frac{1}{2} \sin x} = \frac{2}{\beta \cos x - \sin x}, \quad \beta^{cte} (2k) \in \mathbb{R}$$

أخيرا نجد:

$$y = z + \sin x = \frac{2}{\beta \cos x - \sin x} + \sin x, \quad \beta^{cte} \in \mathbb{R}_+$$

### التمرين الثاني.

لدينا ميدان تعريف التابع  $f$   $D_f = U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

التابع  $f(t; y) = e^{-ty}$  معرف ومستمر على المفتوح  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ، ولدينا :

كذلك مستمرة على  $U$ . نظرية كوشي - ليبشيتز تضمن وجود ووحداية الحل الأعظمي لمسألة كوشي المعطاة،  $\frac{\partial f}{\partial y} = -t e^{-ty}$

بالإضافة لذلك هذا الحل معرف على مجال مفتوح من الشكل:  $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}, \alpha < 0 < \beta, I = ]\beta, \alpha[$  .

- الشفعية:

لنعتبر:  $z(t) = -\varphi(-t)$  المعرف على المجال  $]-\beta, \alpha - [$  . التابع  $Z$  قابل للاشتقاق من تعريفه (كونه تركيب وضرب توابع

قابلة للاشتقاق، بالإضافة إلى كون  $\varphi$  قابل للاشتقاق).

لدينا:  $z(0) = -\varphi(-0) = 0$  ، ثم إن:

$$z'(t) = \varphi'(-t) = e^{t\varphi(-t)} = e^{-tz(t)}$$

مما يدل على أن  $Z$  حل لمسألة كوشي المعطاة، إذا فهو اقتصر للحل الأعظمي  $\varphi$ ، نستنتج إذا:

$]-\beta, \alpha - [ \subset ]\alpha - , \beta - [$  أي:  $\alpha = -\beta$  و  $z(t) = -\varphi(-t) = \varphi(t)$  من أجل كل  $t$  من المجال

$]-\beta, \beta - [$

أخيرا نستنتج أن التابع  $\varphi$  فردي.

- الرتبة؛

التابع  $\varphi$  من صنف  $C^1$  على  $I$  ولدينا:  $\varphi'(t) = e^{-t\varphi(t)} > 0$  ومنه فإن  $\varphi$  متزايد تماما على  $]-\beta, \beta - [$  .

- إثبات أن  $\varphi$  معرف على  $\mathbb{R}$ ؛

بالخلف، لنفرض أن  $\varphi$  معرف على مجال  $]-\beta, \beta - [$  مع  $\beta \neq +\infty$ . عندئذ يمكن أن نكتب:

$$\varphi(t) = \int_0^t \varphi'(s) ds = \int_0^t e^{-s\varphi(s)} ds$$

بأن  $\varphi$  متزايد تماما، إذا على المجال  $[\beta, 0]$  :  $\varphi(t) \geq 0$  لأن  $\varphi(0) = 0$   
 كذلك التابع :  $t \mapsto e^{-t\varphi(t)}$  محدود (كون المجال  $[\beta, 0]$  محدود)، اذا فهو قابل للمكاملة على المجال  $[\beta, 0]$  ، إذا يقبل نهاية  
 منتهية عند  $\beta$ .

العلاقة:  $\varphi'(t) = e^{-t\varphi(t)}$  تثبت أن  $\varphi'$  يقبل نهاية عند  $\beta$  ، هذا يعني أن  $\varphi$  يقبل تمديدا للمجال  $[\beta, \beta -]$  بتابع هو حل للسألة  
 المعطاة، وهذا يناقض أعظمية الحل  $\varphi$ ، ومنه  $\beta = +\infty$  ، مما يعني أن  $\varphi$  معرف على  $\mathbb{R}$ .

- إثبات أن  $\varphi$  محدود ويملك نهاية؛  
 انطلاقا من النهاية:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t\varphi(t)} = 0$$

وهذا كون  $\varphi$  متزايد تماما وموجب. اذا التكامل

$$\int_0^t e^{-s\varphi(s)} ds$$

متقارب عند  $+\infty$  نحو قيمة معينة:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \int_0^{+\infty} e^{-s\varphi(s)} ds = l$$

ومن كون  $\varphi$  متزايد تماما، ينتج:  $\forall t \geq 0, \varphi(t) < l$   
 ومنه يمكن أن نستنتج:

$$l > \int_0^{+\infty} e^{-tl} dt = \frac{1}{l}$$

مما يعني أن  $l > 1$  لكوننا سبق وأن أثبتنا أن:  $l > 0$ .

### التمرين الثالث.

$$\begin{cases} y' = g(y, t) = y - t \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$D_g = U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

لكتابة متتالية التقريبات المتعاقبة، نكتب أولا المعادلة المرفقة بالمسألة المعطاة:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds = 2 + \int_0^t f(s, y(s)) ds$$

وعليه متتالية التقريبات المتعاقبة تكون كمايلي:

$$y_n(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y_{n-1}(s)) ds = 2 + \int_0^t (y_{n-1}(s) - s) ds$$

نلاحظ أنه على أي مستطيل من الشكل  $\mathcal{R} = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2: |t| < a, |y - 2| < b, a, b \in \mathbb{R}_+^*\}$

التابع  $f(t; y) = y - t$  يحقق شروط النظرية الأساسية/كوشي - ليبشيتز: من صف  $C^1$  على  $\mathcal{R}$  وبالتالي فإن هذه المتتالية (التقريبات المتعاقبة) تتقارب نحو الحل الدقيق.

حساب التقريبات الثلاثة الأولى:

التقريب الأول:

$$y_1(t) = 2 + \int_0^t (y_0(s) - s) ds = 2 + \left[ 2s - \frac{1}{2}s^2 \right]_0^t = 2 + 2t - \frac{1}{2}t^2$$

التقريب الثاني:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= 2 + \int_0^t (y_1(s) - s) ds = 2 + \left[ 2s + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{6}s^3 \right]_0^t \\ &= 2 + 2t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 \end{aligned}$$

التقريب الثالث:

$$\begin{aligned} y_3(t) &= 2 + \int_0^t (y_2(s) - s) ds = 2 + \left[ 2s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3 - \frac{1}{6}s^3 \right]_0^t \\ &= 2 + 2t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{24}t^4 \end{aligned}$$

$$y_3(t) = 1 + t + 1 + \frac{t}{1!} + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 - \frac{1}{4!}t^4$$

وهكذا يمكن أن نستنتج الحد العام لهذه المتتالية:

$$y_n(t) = (1 + t) + \left( 1 + \frac{t}{1!} + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \dots + \frac{1}{n!}t^n \right) - \frac{1}{(n+1)!}t^{n+1}$$

وبالمرور للنهاية لما  $n$  يؤول إلى  $+\infty$  نجد أن  $(y_n(t))$  تؤول إلى  $(1 + t) + e^t$  كون

$$\lim_{+\infty} \left( 1 + \frac{t}{1!} + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \dots + \frac{1}{n!}t^n \right) = e^t$$

ومنه الحل الدقيق المطلوب هو:

$$y(t) = (1 + t) + e^t$$

**Cours semestre 2**  
**Équations différentielles ordinaire**

## 2-4 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

### 2-4-1 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

**Définition1.** On appelle équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants, une équation du type :

$$y'' + ay' + by = C(x) \dots \quad (L_2)$$

Où  $a, b$  des scalaires de  $\mathbb{R}$  et  $C$  une fonction continue d'un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

#### a) Résolution de l'équation homogène

On s'intéresse dans cette section à l'équation (E-H):

$$y'' + ay' + by = 0$$

**Proposition1.** La fonction  $x \mapsto e^{rx}$  est une solution de (L-H) si, et seulement si,  $r$  est solution de l'équation  $r^2 + ar + b = 0$ .

L'équation algébrique(E-C):

$$r^2 + ar + b = 0$$

est appelée *équation caractéristique* de (E-H).

**Preuve.** On pose  $y(x) = e^{rx}$ , on obtient  $y' = re^{rx}$  et  $y'' = r^2e^{rx}$ , on a donc :

$$y'' + ay' + by = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}: r^2e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}: (r^2 + ar + b)e^{rx} = 0$$

$$\Leftrightarrow r^2 + ar + b = 0$$

Cqfd.

**Définition2.** Soient  $y_1; y_2$  deux applications dérivables sur  $I$ .

On appelle **Wronskien** de  $y_1; y_2$  l'application définie par :

$$W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

**Proposition 2.** Les solutions à (E:H:) sur  $I$  forment un e.v de dimension 2 (sur  $\mathbb{R}$ ), noté  $S_2(I)$ .

- Si  $y_1; y_2$  sont deux solutions indépendantes de (E-H), alors  $\{y_1; y_2\}$  est une base de  $S_2(I)$ , c'est à dire  $S_2(I) = \{\alpha y_1 + \beta y_2; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ .

-Si  $W(x_0) \neq 0$  pour un  $x_0 \in I$ , alors  $W(x) \neq 0$  pour tout  $x \in I$ , et c'est une CNS pour que  $\{y_1; y_2\}$  soit linéairement indépendant (système fondamental de solution) et donc une base de  $S_2(I)$ .

**Proposition 3.** On note  $\Delta$  le discriminant de l'équation caractéristique (E-C).

Suivant le signe de  $\Delta$  on a les résultats suivants :

- $\Delta > 0$  : (E-C) admet deux racines réelles distinctes  $r_1 \neq r_2$ , alors les solutions de l'équation E-H) sont les fonctions :

$$y(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

- $\Delta = 0$  : (E-C) admet une racine double  $r$ , alors les solutions de l'équation E-H) sont les fonctions :

$$y(x) = (A + Bx)e^{rx}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

- $\Delta < 0$  : (E-C) admet deux racines complexes conjuguées  $z_1 = u + iv, z_2 = u - iv$ , alors les solutions de l'équation E-H) sont les fonctions :

$$y(x) = (A \cos vx + B \sin vx)e^{ux}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

**Démonstration :**

$\Delta > 0$ : Il est clair que  $y_1(x) = e^{r_1x}, y_2(x) = e^{r_2x}$  sont solutions à (E:H:). Leur Wronskien est égal à:

$$W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} \\ r_1 e^{r_1x} & r_2 e^{r_2x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) \cdot e^{(r_2+r_1)x} \neq 0$$

Donc  $\{y_1; y_2\}$  soit un système fondamental de solution.

$\Delta = 0$ : On vérifie que  $y_2(x) = xe^{rx}$  est solution de (E-H). Le Wronskien est égal à:

$$W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & (rx + 1)e^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx} \neq 0.$$

Donc  $\{y_1; y_2\}$  soit un système fondamental de solution.

$\Delta < 0$  :  $y_1(x) = \cos vx e^{ux}, y_2(x) = \sin vx e^{ux}$  sont solutions à (E-H). Le Wronskien est égal à:

$$\begin{aligned} W(y_1; y_2) &= \begin{vmatrix} \cos vx e^{ux} & \sin vx e^{ux} \\ (u \cos vx - v \sin vx)e^{ux} & (v \cos vx + u \sin vx)e^{ux} \end{vmatrix} \\ &= v(\cos^2 vx + \sin^2 vx)e^{2ux} = ve^{2ux} \neq 0 \end{aligned}$$

Car  $v \neq 0$ , donc  $\{y_1; y_2\}$  un système fondamental de solution.

**b) Résolution de l'équation avec second membre**

On cherche les solutions de  $(L_2)$  définies sur  $I$ . Comme dans le cas du premier ordre, on a le théorème.

**Théorème** Si  $y_p$  est une solution de  $(L_2)$  ; alors une fonction  $y$  est une solution de  $(L_2)$  si, et seulement si,  $y - y_p$  est une solution de (E-H). Ce qui veut dire que les solutions de  $(L_2)$  sont les fonctions :

$$y(x) = y_p(x) + y_0(x), \quad y_0 \text{ solution de (E. H)}$$

**Remarque.** On obtient les solutions de  $(L_2)$  en ajoutant à une solution (particulière) de  $(L_2)$  une solution quelconque de (L.H). Connaissant la solution générale de l'équation homogène, il faut donc trouver une solution particulière.

**Méthode de variation des constantes.** Soient  $y_1; y_2$  deux solutions indépendantes de (E.H). On cherche une solution particulière de  $(L_2)$  sous la forme  $y = Ay_1 + By_2$  où  $A$  et  $B$  sont des fonctions vérifiant  $0 = A'y_1 + B'y_2$ . Donc,  $A'; B'$  sont solutions du système :

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0 \\ A'y'_1 + B'y'_2 = C(x) \end{cases}$$

**Exemple 1.** Résolvons l'équation

$$y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$$

a) **Équation homogène.** L'équation caractéristique est  $r^2 + 1 = 0$ . La S.G de (E.H) est donc

$$y = A \cos x + B \sin x.$$

b) Cherchons une solution particulière. Les solution  $y_1 = \sin x$ ,  $y_2 = \cos x$  sont L-I, en effet leur Wronskien vaut  $w(x) = -1$ . Cherchons une solution sous la forme

$$y_p(x) = A(x) \sin x + B(x) \cos x$$

$A'; B'$  sont solutions du système :

$$\begin{cases} A' \sin x + B' \cos x = 0 \\ A' \cos x - B' \sin x = \frac{1}{\sin^3 x} \end{cases}$$

Donc :

$$A' = \frac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ 1 & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{\cos x}{\sin^3 x}$$

$$B' = \frac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & \frac{1}{\sin^3 x} \end{vmatrix} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

Avec les primitives

$$A = \frac{-1}{2\sin^2 x}; \quad B = \frac{\cos x}{\sin x},$$

On a donc la S.P

$$y_p(x) = \frac{-1}{2\sin x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{\cos 2x}{2\sin x}$$

Donc la S.G de  $(L_2)$  est:

$$y = A \cos x + B \sin x + \frac{\cos 2x}{2\sin x}; \quad A, B^{cte} \in \mathbb{R}.$$

**Exemple2.**

$$y'' - y = (3x + 1)e^{2x}$$

Résolution de (E.H): les solutions de (E.H) sont toutes les fonctions :

$y_0 = Ae^x + Be^{-x}$ ,  $A, B^{ct} \in \mathbb{R}$  Car, les racines de l'équation *caractéristique* sont  $\pm 1$ .

Recherche d'une solution particulière de l'équation  $(L_2)$ : cherchons une S.P de  $(L_2)$  sous la forme :

$$y_p(x) = (\alpha x + \beta)e^{2x}$$

$$y'' - y = 3xe^{2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}: (3\alpha x + 3\beta + 4\alpha) = 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 1; \beta = -1$$

Donc

$$y_p(x) = (x - 1)e^{2x}$$

La S.G de  $(L_2)$  est donc :

$$y(x) = Ae^x + Be^{-x} + (x - 1)e^{2x}; \quad A, B^{ct} \in \mathbb{R}$$

**Exemple3.**

$$y'' - 2y' + 2y = \cos 2x + e^x$$

Résolution de (E.H) : les solutions de (E.H) sont les fonctions :  $y = (A \cos x + B \sin x)e^x$ ,  $A, B \in \mathbb{R}$ .

Cherchons une S.P de l'équation  $y'' - 2y' + 2y = \cos 2x \dots (1)$  sous la forme :

$$y_1 = A \cos 2x + B \sin 2x, \text{ on trouve : } y_1 = \frac{-1}{10} \cos 2x + \frac{-1}{5} \sin 2x,$$

Cherchons une S.P de  $y'' - 2y' + 2y = e^x \dots (2)$  sous la forme :  $y_2 = \mu e^x$ , on obtient  
 $:\mu = 1$ .

La S.G de  $(L_2)$  est donc :

$$y(x) = (A \cos x + B \sin x)e^x + \frac{-1}{10} \cos 2x + \frac{-1}{5} \sin 2x + e^x, A, B \in \mathbb{R}$$

## 2-4-2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients non constants

**Définition 1.** On appelle équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients non constants, une équation du type :

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = C(x) \dots (L_2)$$

Où  $a, b$  et  $C$  sont des fonctions continue d'un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

**L'équation homogène associée E-H:**  $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ .

**Exemple.** L'équation

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$$

Les coefficients  $a(x) = \frac{1}{x}$ ;  $b(x) = -\frac{1}{x^2}$  sont continue sur tout intervalle ne contenant pas le point  $x = 0$ , cette équation admet les solutions particulières

$$y_1(x) = x; \quad y_2(x) = \frac{1}{x}$$

De plus le système  $\{y_1; y_2\}$  est système fondamentale de solution, car :

$$W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{-2}{x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

La solution générale s'écrit donc:

$$y(x) = Ax + B \frac{1}{x}, \quad A; B^{Const} \in \mathbb{R}$$

**Remarque.** Il n'existe pas de méthode générale permettant de trouver sous forme finie la solution générale d'une équation différentielle linéaire à coefficients variables.

**Théorème 1.** Si le système  $\{y_1; y_2\}$  est système fondamentale de solution de E-H sur  $I$ , alors :

$$W(x) = c \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^x a(t)dt\right), \quad c^{Const} \in \mathbb{R}^*; x_0 \in I.$$

**Démonstration.**  $y_1; y_2$  étant deux solutions L-I de E-H, on a:

$$y_2'' + a(x)y_2' + b(x)y_2 = 0, \quad y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1 = 0.$$

Multipliant les termes de première égalité par  $y_1$  et le seconde par  $-y_2$  et ajoutant, on obtient :

$$y_2'' y_1 - y_2 y_1'' + a(x)(y_2' y_1 - y_2 y_1') = 0. \quad (3)$$

Le coefficient de  $a(x)$  est le wronskien  $W(y_1, y_2) = y_2' y_1 - y_2 y_1'$ . Le premier terme est la dérivée du  $W(y_1, y_2)$ :

$$W_x'(y_1, y_2) = (y_2' y_1 - y_2 y_1')' = y_2'' y_1 - y_2 y_1''$$

Par conséquent, l'égalité (3) s'écrit comme :

$$W' + a(x)W = 0. \quad (4)$$

(4) est une équation linéaire du premier ordre, donc la solution de (4) satisfaisant à la condition initiale  $W(x_0) = W_0$  s'écrit comme :

$$W(x) = W(x_0) \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^x a(t) dt\right). \quad (5)$$

La formule (5) est appelée *formule de Liouville*.

**Théorème2.** Si l'on connaît une solution particulière  $y_1$  de (E-H). On peut alors chercher une autre solution particulière  $y_2$  de l'équation E-H, et la solution générale de E-H s'écrit comme :

$$y(x) = Ay_1 + By_2, \quad A; B^{Const} \in \mathbb{R}$$

**Démonstration.** Soit  $y_1$  une solution particulière connue de (E-H). Trouvons une autre solution particulière  $y_2$  de l'équation proposée telle que le système  $\{y_1; y_2\}$  est système fondamentale de solution.

On a:  $W(x) = y_2' y_1 - y_2 y_1' = c \cdot \exp(-\int a(x) dx)$ .

Divisions tous les termes par  $y_1^2$ :

$$\frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{c \cdot \exp(-\int a(x) dx)}{y_1^2}$$

Donc :

$$d\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2} c \cdot \exp\left(-\int a(x) dx\right).$$

D'où :

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{1}{y_1^2} c \cdot e^{-\int a(x) dx} dx + c'.$$

Comme nous cherchons une solution particulière, on aura en posant  $c = 1, c' = 0$ :

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int a(x) dx} dx. \quad (6)$$

La solution générale de E-H s'écrit donc :

$$y(x) = Ay_1 + By_1 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int a(x) dx} dx, \quad A; B^{Const} \in \mathbb{R} \quad (7)$$

**Exemple.** L'équation

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

Sachant que  $y(x) = x^2$  est solution.

D'après la relation (6) la deuxième solution :

$$y_2 = x^2 \int \frac{1}{x^4} \cdot e^{\ln x^2} dx = x^2 \int \frac{1}{x^2} dx = -x.$$

Donc la S.G de l'équation proposée est:

$$y(x) = Ax^2 - Bx, \quad A; B^{Const} \in \mathbb{R}$$

### Méthode de Cauchy Euler

**Dif1.** Une équation d'Euler d'ordre 2 est une équation différentielle linéaire de la forme

$$x^2 y'' + axy' + by = 0$$

Où  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles,

#### **Méthode de Résolution.**

##### **1. Première Méthode**

On peut se ramener à une équation à coefficients constants en effectuant le changement de variable  $x = e^t$ .

On se place sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ , pour pouvoir diviser par  $x^2$ ,

$$y'' + \frac{a}{x} y' + \frac{b}{x^2} y = 0$$

Le changement de variable  $x = e^t$  donne :  $dx = e^t dt$

Exprimons les fonctions dérivées :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$$
$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dt} \frac{dt}{dx} = e^{-2t} \left( -\frac{dy}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2} \right)$$

Reportons  $x$ ,  $y'$  et  $y''$  en fonction de la variable  $t$  dans l'équation d'Euler, l'équation à résoudre est donc :

$$y''_t + (a-1)y'_t + by_t = 0, \quad y(e^t) = y_t$$

##### **2. Deuxième Méthode**

Pour simplifier les calculs on peut se ramener l'équation de Euler à la forme

$$y'' + \frac{a}{x} y' + \frac{b}{x^2} y = 0$$

On cherche une solution particulière de la forme  $y = x^r$  avec  $r \in \mathbb{Z}$  et il faut dès lors trouver les valeurs de  $r$  vérifiant

$$(r(r - 1)x^{r-2}) + a(rx^{r-2}) + b(x^{r-2}) = 0.$$

La recherche des solutions k de l'équation du second degré

$$r^2 + (a - 1)r + b = 0.$$

#### 4. Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1.

##### 4.1 Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coefficients constants.

**Déf.1.** Un système linéaire différentiel d'ordre 1 à coefficients constants est un système de la forme

$$Y'(t) = AY(t) + B(t), \quad t \in I \quad (1.1)$$

Où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $Y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  est une matrice carrée à coefficients constants,  $B(t): I \rightarrow K^n$  est un vecteur à coefficients continus.

**Exemple. 1.**

$$\begin{cases} x'(t) = 2x + 3y + t \\ y'(t) = x - y - e^t \end{cases} \quad \text{Ceci revient à prendre } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

Dans ce paragraphe, on considère le problème de Cauchy correspondant

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t) + B(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Le théorème suivant est une adaptation du théorème de Cauchy-Lipshitz du chapitre précédent. Autrement dit, les solutions du problème de Cauchy (1.2) sont globales.

**Théorème1.** Pour chaque  $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$  il passe une seule solution de (1.2) définie sur  $I$ .

- est un s.e-v de dimension  $n$  de  $C^1(I, \mathbb{R}^n)$
- $S = \{ \text{solutions } Y'(t) = A.Y(t) + B(t) \} = S_0 + Y_p$ ,  $Y_p$  étant une solution particulière de (1.1).

**Etude de  $Y'(t) = A.Y(t)$ .**

$Y'(t) = A.Y(t) \dots (1.0)$  Le système différentiel sans second membre associé a (1.1)

On va étudier l'ensemble des solutions de ce système et le problème de Cauchy associé.

**Conséquence.** Si  $y_1(t); y_2(t), \dots; y_n(t)$  Forment une base de  $S_0$  alors la solution générale de (1.0) est :

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(t), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

**Lemme. (WRONSKIEN)**

Soient  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$  des solutions du système homogène (1.0) sur un intervalle  $I$ . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$  est un système fondamental.
- Le Wronskien  $W$  ne s'annule pas sur  $I$ .

- Il existe un point  $t_0$  de  $I$  tel que  $(t_0) \neq 0$ .

### 1- Cas où $A$ est diagonalisable

**Théorème 2.** Soit  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients dans

$\mathbb{R}$  diagonalisable. On note  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  les valeurs propres et  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  une base de vecteurs propres associés. Alors, l'ensemble des solutions de  $Y'(t) = A.Y(t)$ , sont

$$Y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} v_n$$

**Démonstration** : On appelle  $P$  la matrice de passage dont la  $i^{\text{ème}}$  colonne est le vecteur  $v_i$ , alors,  $P^{-1}AP = D$ , matrice diagonale des  $\lambda_i$ . On pose :  $X = P^{-1}Y$ ,  $Y = PX$ , et on a :  $X' = P^{-1}Y'$ ,  $Y' = PX'$  car  $P$  est constant, puisque  $A$  est constant.

$$Y' = AY \Rightarrow PX' = APX \Rightarrow X' = P^{-1}APX = DX$$

On pose:  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^t$  le système devient :

$$\begin{cases} x'_1(t) = \lambda_1 x_1(t) \\ x'_2(t) = \lambda_2 x_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = \lambda_n x_n(t) \end{cases} \quad \text{Qui se résout en} \quad \begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ x_2(t) = \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ x_n(t) = \alpha_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

Enfin,  $Y = PX$  donne alors :

$$Y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} v_n$$

On remarquera que dans ce cas, le calcul de  $P^{-1}$  est inutile.

**Exemple 2.**

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

$$Y'(t) = A.Y(t), \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont 2 et 3, les vecteurs propres associés sont  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour

$$X = P^{-1}Y \Rightarrow Y = PX \Rightarrow X' = DX \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \mu e^{2t} \\ \gamma e^{3t} \end{pmatrix} \text{ avec } \mu, \gamma \in \mathbb{R}$$

$$Y' = AY \Leftrightarrow Y(t) = \mu e^{2t} v_1 + \gamma e^{3t} v_2$$

## 1.2. Cas où A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$

Si on résout le système sur  $\mathbb{C}$  comme on vient de le faire, les valeurs propres complexes non réelles sont 2 à 2 conjuguées et on peut prendre des vecteurs propres 2 à 2 conjugués. À partir des solutions complexes, il s'agit alors de retrouver les solutions réelles.

On obtient la solution générale comme précédemment :

$$Y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} v_n$$

Si  $\lambda_k$  est réel, on prend  $\alpha_k$  réel puisque l'on cherche des solutions réelles. Sinon on remplace  $e^{\lambda_k t} v_k$  et  $e^{\bar{\lambda}_k t} \bar{v}_k$  par  $\operatorname{Re}(e^{\lambda_k t} v_k)$  et  $\operatorname{Im}(e^{\lambda_k t} v_k)$

Or,  $\operatorname{Re}(e^{\lambda_k t} v_k)$  et  $\operatorname{Im}(e^{\lambda_k t} v_k)$  sont deux solutions du système différentiel sur  $\mathbb{R}$ , formant une famille libre.

**Exemple 3.** On va résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = 2y - 2z \\ y' = -2x + z \\ z' = 2x - y \end{cases}$$

La matrice du système est :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Et son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + 9)$$

Donc les valeurs propres sont :  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 3i$  et  $\lambda_3 = -3i$

Par nécessité, on travaille pour le moment sur  $\mathbb{C}$ .

- $\lambda_1 = 0$ . On trouve un vecteur propre en résolvant le système :

$$\begin{cases} 0 = 2y - 2z \\ 0 = -2x + z \\ 0 = 2x - y \end{cases}$$

C'est-a- dire :  $2x = y = z$

Donc  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

- $\lambda_2 = 3i$ . De même on résout le système:

$$\begin{cases} 0 = 3ix + 2y - 2z \\ 0 = -2x - 3iy + z \\ 0 = 2x - y - 3iz \end{cases}$$

Donc  $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 + 3i \\ -1 - 3i \end{pmatrix}$

- $\lambda_2 = -3i$ . On prend pour  $v_3$  le conjugué de  $v_2$ .  $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 - 3i \\ -1 + 3i \end{pmatrix}$

Les vecteurs propres, forment, dans l'ordre des valeurs propres, une base de chaque sous-espace propre.

Sur  $\mathbb{C}$ , les solutions sont donc :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ -1 + 3i \\ -1 - 3i \end{pmatrix} e^{3it} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ -1 - 3i \\ -1 + 3i \end{pmatrix} e^{-3it}$$

On a

$$\begin{aligned} v_2 e^{3it} &= \begin{pmatrix} 4\cos 3t + 4i\sin 3t \\ -\cos 3t - 3\sin 3t + i(3\cos 3t - \sin 3t) \\ -\cos 3t + 3\sin 3t + i(-3\cos 3t - \sin 3t) \end{pmatrix}, v_3 e^{-3it} \\ &= \begin{pmatrix} 4\cos 3t - 4i\sin 3t \\ -\cos 3t - 3\sin 3t + i(-3\cos 3t + \sin 3t) \\ -\cos 3t + 3\sin 3t + i(3\cos 3t + \sin 3t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(e^{\lambda_2 t} v_2) = \begin{pmatrix} 4\cos 3t \\ -\cos 3t - 3\sin 3t \\ -\cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(e^{\lambda_2 t} v_2) = \begin{pmatrix} 4\sin 3t \\ 3\cos 3t - \sin 3t \\ 3\cos 3t - \sin 3t \end{pmatrix}$$

Finalement on a,

$$\begin{cases} x(t) = \alpha + 4\beta\cos 3t + 4\gamma\sin 3t \\ y(t) = 2\alpha + \beta(-\cos 3t - 3\sin 3t) + \gamma(3\cos 3t - \sin 3t) \\ z(t) = 2\alpha + \beta(-\cos 3t + 3\sin 3t) + \gamma(3\cos 3t - \sin 3t) \end{cases}$$

**Remarque.** Lorsque  $A$  n'est pas diagonalisable, on a alors besoin (en général) de la notion d'exponentielle de matrice

## EXPONENTIELLE DE MATRICES.

**Déf.2.** On appelle exponentielle de  $A \in Mn(K)$ , la somme de la série normalement convergente

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

**Remarque.** L'application  $Mn(K) \rightarrow Mn(K)$ ,  $A \mapsto \exp A$  est continue.

**Exemple 4.**  $\exp(\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n})$ ; en particulier,  $\exp 0 = I_n$ .

**Proposition 1.** Soit  $A, B \in Mn(K)$  et  $P \in GL_n(K)$ .

- Si  $AB = BA$  (A et B commutent) alors  $\exp A \cdot \exp B = \exp(A + B)$ .
- .
- .
- .

*semblables*

Comment calculer  $e^A$  ?

- Si, A est diagonale.

$$\exp(\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n})$$

- Cas où A est diagonalisable,  $A = PDP^{-1}$  où D est diagonale, alors :

$$e^A = P e^D P^{-1}$$

**Remarque.** La relation ci-dessus est valable pour toute matrice D, diagonale ou non.

- Cas où A est nilpotente

**Déf.3.** On dira qu'une matrice carrée A d'ordre n est **nilpotente**, s'il existe  $q \in \mathbb{N}^*$  tel que,

$$A^q = 0_n.$$

Dans ce cas :

$$e^A = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{A^k}{k!} = I + A + \dots + \frac{A^{q-1}}{(q-1)!}$$

**Exp.5.** Calculer  $e^A$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Supposons que  $A = \lambda I + N$  où N est une matrice triangulaire supérieure, dont la diagonale est composé par des 0 (N est nilpotente), alors :

$$e^A = e^\lambda \sum_{k=0}^{q-1} \frac{N^k}{k!}$$

- Supposons que  $A = D + N$  où  $D$  est diagonalisable et  $N$  est nilpotente qui commutent. Il en résulte :

$$e^A = e^D e^N,$$

$$\begin{cases} e^D = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} \\ e^N = I + N + \dots + \frac{N^{q-1}}{(q-1)!} \end{cases}$$

### Décomposition de **Dunford-Jordan**

- Si  $A$  est une matrice de Jordan d'ordre  $n$  tel que :

$$A = J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & (0) \\ \vdots & \ddots & 1 \\ (0) & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Alors,  $\forall t \in \mathbb{R}$ :

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & te^{\lambda t} \\ 0 & \dots & & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

**Exp.6.** Calculer  $e^{tB_i}$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

$$e^{tB_1} = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} & \frac{t^2}{2} e^{3t} \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}, \quad e^{tB_2} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

- Dans le cas où la matrice étudiée n'est ni diagonalisable, ni nilpotente, et si la décomposition précédente n'apparaît pas de façon évidente : on utilise ce que l'on appelle la « réduction de Jordan ».

La réduction de Jordan consiste à trouver une base dans la quelle la matrice est diagonale par bloc, chacun des blocs figurant sur le diagonale état de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & (0) \\ \vdots & \ddots & 1 \\ (0) & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Où  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ .

Le théorème spectral permet de décomposer  $E$  comme la somme directe des sous espaces spectraux :

$$E = \bigoplus E_i$$

Pour trouver cette réduction, on procède de la façon suivante :

- On cherche les valeurs propres de  $A$ .
- Pour chaque valeur  $\lambda_i$ , on effectue la manipulation : on construit la suite emboîtée suivante et on calcule la dimension de chaque noyau :

$$\ker(A - \lambda_i I) \subsetneq \ker(A - \lambda_i I)^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker(A - \lambda_i I)^{r_i} = E_i$$

Cette suite s'arrête pour  $r_i \geq 1$  tel que :  $\dim \ker(A - \lambda_i I)^{r_i} = m_i$  ( $m_i$  la multiplicité de  $\lambda_i$ ).

On dispose alors :

$r_i$  : est la taille du bloc de Jordan associés à  $\lambda_i$ .

$P_i$  :  $\dim \ker(A - \lambda_i I)$  Est le nombre de blocs de Jordan associés à  $\lambda_i$ .

- On construit une base des  $E_i$  de la manière suivante :

1. On cherche tous les  $v$  tels que  $v \in \ker(A - \lambda_i I)$
2. Puis pour chacun des vecteurs  $v$  trouvés, on cherche les  $w$  tels que  $v = (A - \lambda_i I) w$ .  
On voit alors que :  $w \in \ker(A - \lambda_i I)^2 / \ker(A - \lambda_i I)$ .
3. On itère le procédé jusqu'à épuisement.

**Exp.7.** Calculer  $e^A$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de  $A$  est (après calculs) :  $P_A(\lambda) = (\lambda - 6)(\lambda - 4)^2$

Admet deux racines  $\lambda = 6$  (racine simple),  $\lambda = 4$  (racine double).

- Pour  $\lambda = 6$ .

On résout :

$$(A - 6I_3) \cdot v = 0,$$

Et on trouve :  $v_6 = (1; 1; 0)^t$

Le sous espace spectral  $E_1 = \text{Ker}(A - 6I_3)$  est donc engendré par  $v_6$ .

- Pour  $\lambda = 4$ .

On résout ensuite:

$$(A - 4I_3) \cdot v = Mv = 0,$$

On trouve un seul vecteur :  $v_4 = (1; 0; 1)^t$ . Donc  $A$  n'est pas diagonalisable.

Posons  $E_2 = \text{Ker}M^2$ .  $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , Donc  $\dim \text{Ker}M^2 = 2$ .

Il y a donc un bloc de taille 2.

On cherche alors  $w_4$  tel que :  $v_4 = Mw_4$ , et on trouve :  $w_4 = (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0)^t$

Ainsi  $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$  et dans la base  $\{v_6, v_4, w_4\}$ ,  $A$  s'écrit :

$$A = PJP^{-1} \text{ Tel que : } J = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \text{ avec } P = (v_6 \ v_4 \ w_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule l'inverse de la matrice de passage  $P$  :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a ainsi,

$$e^J = \begin{pmatrix} e^6 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & e^4 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 2(e^6 + e^4) & 2e^6 & e^4 - e^6 \\ 0 & 4e^4 & 0 \\ 4(e^4 - e^6) & 4(2e^4 - e^6) & 2(e^6 + e^4) \end{pmatrix}$$

**Exp.8.** Calculer  $e^{tA}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est :  $P_A(\lambda) = (2 - \lambda)^3$

2 est une racine triple de  $P_A(\lambda)$ . On a :  $A - 2I_3 = M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , puisque

$\dim \text{Ker} M = 1$  donc A n'est pas diagonalisable.

$$M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ Donc } \dim \text{Ker} M^2 = 2.$$

Enfin  $M^3 = 0$ , on en déduit que  $\dim \text{Ker} M^3 = 3$ . Alors la réduite de Jordan de A comporte donc un bloc de taille 3.

Soit  $v_3 = (1; 1; 1)^t \in \text{Ker} M^3 \setminus \text{Ker} M^2$ .

Puis  $v_2 = Mv_3 = (1; 0; 1)^t$ .

Enfin  $v_1 = Mv_2 = (1; 1; 0)^t$ .

La matrice de passage P définie par :  $P = (v_1 \ v_2 \ v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Inversons P on

trouve :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a :  $e^{tA} = P e^{tJ} P^{-1}$  avec,  $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

On a :  $e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$  alors,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} - \frac{t^2}{2}e^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} & te^{2t} + \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ te^{2t} - \frac{t^2}{2}e^{2t} & e^{2t} - te^{2t} + \frac{t^2}{2}e^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ -te^{2t} & te^{2t} & e^{2t} + te^{2t} \end{pmatrix}$$

**Proposition.2.** Si  $A$  est une matrice carrée, alors :

$$\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr}(A))$$

**Proposition.3.** L'application  $t \mapsto f(t) = e^{tA}$  est dérivable, et :

$$f'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

**Résolvante.**

On dispose désormais de tous les outils nécessaires pour énoncer notre théorème.

**Théorème3.** La solution générale du système :  $Y'(t) = A.Y(t)$ ... (1.0) est donnée par la formule :

$$Y(t) = e^{tA}.V \text{ avec } V \in K^n.$$

**Théorème4.** La solution du problème de Cauchy :  $\begin{cases} Y'(t) = A.Y(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$  ... (1.1) est :

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A}.Y_0$$

**Exp.9.** On va résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = 2x + z \\ y' = x + y \\ z' = -x + y + 3z \end{cases} \text{ Avec } Y(0) = Y_0 = (1; 1; 1)$$

D'après l'exemple 8, on a donc :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ Alors la solution est :}$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} - \frac{t^2}{2}e^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} & te^{2t} + \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ te^{2t} - \frac{t^2}{2}e^{2t} & e^{2t} - te^{2t} + \frac{t^2}{2}e^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ -te^{2t} & te^{2t} & e^{2t} + te^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t} + te^{2t} + \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ y(t) = e^{2t} + \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ z(t) = e^{2t} + te^{2t} \end{cases}$$

## Système fondamentale de solutions.

On appelle système fondamental de solutions de  $S_0 = \{\text{solutions } Y'(t) = A.Y(t)\}$  une famille libre de  $n$  fonctions solutions de  $(S_0)$ .

Un système fondamental est une base de  $(S_0)$ .

### Matrice fondamentale de solutions

**Déf.4.** Une matrice fondamentale de solutions est une matrice  $X$  dont les colonnes sont  $n$  solutions linéairement indépendantes de  $(S_0)$ .

**Théorème.5.**  $e^{tA}$  Est une matrice fondamentale de solutions, c'est-à-dire que ses colonnes sont  $n$  solutions linéairement indépendantes de  $Y'(t) = A.Y(t)$ .

2. N'importe quelle matrice fondamentale  $X$  satisfait  $X(t) = e^{tA}X(0)$ .

**Etude de  $Y'(t) = AY(t) + B(t)$ .**

Soit le problème de Cauchy.

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t) + B(t), & t \in I \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Où  $t_0 \in I$ .

On connaît déjà la structure des solutions de ce système : toute solution est de la forme  $Y_1 + S_0$ , où  $Y_1$  est une solution particulière. Comment trouver une solution  $Y_1$  ?

**Méthode de variation des constantes.** Supposons que l'on connaisse une base de solutions  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  du système  $Y'(t) = AY(t)$  et résolvons le système non homogène (1.1) pour  $B \in C(I; \mathbb{R})$ . On cherche les solutions de (1.1) sous la forme

$$Y(t) = \alpha_1(t)y_1 + \alpha_2(t)y_2 + \dots + \alpha_n(t)y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)y_i(t)$$

Où, cette fois, les  $\alpha_i(t)$  ne sont plus des nombres réels mais des fonctions :  $\alpha_i(t) \in C^1(I; \mathbb{R})$ . On a :

$$Y'(t) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i'(t)y_i(t) + \alpha_i(t)y_i'(t))$$

Comme, par hypothèse, pour tout  $y_i$  vérifie  $y_i' = Ay_i$  on en déduit que,

$$Y'(t) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i'(t)y_i(t) + \alpha_i(t)Ay_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i'(t)y_i(t) + AY(t)$$

Par conséquent, pour que  $Y$  soit solution de (1.1) il faut et il suffit que:

$$B(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i'(t)y_i(t) \quad (1.3)$$

Notons

$M(t) = [y_1, y_2, \dots, y_n]$  la matrice dont les colonnes sont les vecteurs  $y_1, y_2, \dots, y_n$  et

$$\alpha(t) = [\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)]^t$$

Le système (1.3) s'écrit avec ces notations,

$$B(t) = M(t). \alpha'(t)$$

Et on déduit que,

$$\alpha'(t) = M^{-1}(t). B(t), \quad t \in I$$

Et pour  $t_0 \in I$  fixé,

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^t M^{-1}(s). B(s) ds + C$$

Où  $C \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur constant quelconque. Cela détermine la solution cherchée. On a alors

$$Y(t) = M(t). C + M(t) \int_{t_0}^t M^{-1}(s). B(s) ds$$

On remarquera que, dans cette formule,  $M(t). C$  est la solution générale du système homogène et  $M(t) \int_{t_0}^t M^{-1}(s). B(s) ds$  est une solution particulière du système non homogène.

La solution de (1.2) s'écrit alors,

$$Y(t) = M(t). Y_0 + \int_{t_0}^t M(t) M^{-1}(s). B(s) ds$$

La matrice  $R(t; s) = M(t) M^{-1}(s)$  s'appelle matrice résolvante de (1.2).

**Remarque.** Si on connaît  $e^{tA}$ , on cherche une solution de la forme  $e^{tA} W(t)$ . On trouve que

$$\int_{t_0}^t e^{(t-s)A}. B(s) ds$$

est une solution particulière.

**Théorème.6.**  $Y_1 = \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}. B(s) ds$  est une solution de  $Y' = AY + B$ .

**Théorème.7.**  $Y = e^{(t-t_0)A} Y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}. B(s) ds$  est la solution de  $Y' = AY + B$ , avec  $Y(t_0) = Y_0$

**Remarque.** Pour tout  $V = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)]^t \in C(I; \mathbb{R})$ , on note,

$$\int V(s) ds = \left[ \int v_1(s) ds, \int v_2(s) ds, \dots, \int v_n(s) ds, \right]^t$$

**Exp.10.** On va résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 2x - y + e^{-t} \end{cases} \text{ Avec } Y(0) = Y_0 = (1; 1)$$

- La solution générale du système homogène associé :

Les valeurs propres de  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  sont  $-2, 1$ .  $A$  est donc diagonalisable. Les vecteurs propres

Sont  $(1, -2)^t$  et  $(1, 1)^t$  respectivement.

Par conséquent si

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On a

$$Y(t) = P e^{DP^{-1}} V = e^{tAV} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-2t} + 2e^t & e^t - e^{-2t} \\ -2e^{-2t} + 2e^t & 2e^{-2t} + e^t \end{pmatrix} V$$

Cherchons une solution particulière  $Y_1$  de  $Y' = AY + B$ .

On a,

$$\begin{aligned} Y_1 &= \int_0^t e^{(t-s)A} \cdot B(s) ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-2t+2s} + 2e^{t-s} & e^{t-s} - e^{-2t+2s} \\ -2e^{-2t+2s} + 2e^{t-s} & 2e^{-2t+2s} + e^{t-s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-s} \end{pmatrix} ds \\ &= \frac{1}{3} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{t-2s} - e^{-2t+s} \\ 2e^{-2t+s} + e^{t-2s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement,

$$Y(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-2t} + 2e^t & e^t - e^{-2t} \\ -2e^{-2t} + 2e^t & 2e^{-2t} + e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = e^t - \frac{1}{2}e^{-t} \\ y(t) = e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \end{cases}$$