الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة – بوسعادة
المجاهد الفريق احمد قايد صالح
قسم العلـوم الفيـزيائـية

Ecole Normale Supérieure
de Bousaada
Département de Science physique

2025/03/12
2025/81

دروس في ميكانيك النقطة المادية

المقياس: الميــــكانيــــــــك 1

المستوى: السنة الأولى جذع مشترك

الأستاذ: بن عامــــــر علـــــــي

الرتبة: أستاذ محاضر – أ بالمدرسة العليا للأساتذة بوسعادة

السنة الجامعية 2024/2023

الفهرس

مقدمة عامة

الفيزياء أو ما تعرف بعلم الطبيعة، وهو العلم الذي يهتم بدراسة الظواهر أو حوادث التي تملأ أفق الإنسان، فيصفها ويضع النظريات والقوانين التي تحاول تحديد أسبابها ونتائجها وكيف يمكن الاستفادة منها. وهو علم قائم على التجربة والبرهان، فكل ما نعرفه عن العالم من حولنا والقواعد والنظم التي تتحكم به ليس إلا محصلة ملاحظات وتجارب البشر للظواهر الطبيعية ومحاولة تفسيرها مع مرور الزمن. وبالتالي فإن كل نظرية توضع لوصف أو تعليل أي ظاهرة لابد وأن تخضع للتجربة والاختبار للتأكد من صحتها أو بطلانها. وعند قيامنا بإجراء تجربة ما فإننا نقوم بقياس كميات محددة، كقياس الطول والعرض لشكل هندسي ما، وبهذه المقادير فإننا نستطيع صياغة قوانين كحساب المحيط أو المساحة مثلا، أو مقدار تغير درجة حرارة معدن للحصول على درجة انصهاره، أو حساب سرعة متحرك ما، وكل هذه الكميات المقاسة يطلق عليها عدد يعبر عن قيمة فيزيائية أو اسم كمية فيزيائية. ولتعريف أي كمية فيزيائية يجب أن يكون بالإمكان وصف طريقة لقياسها أو تحديد العمليات الرياضية اللازمة لحسابها. فيعرف الدفع الخطي لجسم بحاصل ضرب كتلته بسرعته، بينما تعرف سرعة الجسم بحاصل قسمة المسافة المقطوعة على الزمن اللازم لذلك، إلا أنه لا توجد كميات فيزيائية أبسط من الكتلة والزمن والمسافة حتى نعرفها بها، ولذلك تسمى هذه الكميات المقادير الأساسية، بينما تسمى الكميات كالقوة والطاقة والعزم وغيرها المقادير المشتقة وتكون وحدات هذه الكميات ناتجة عن حاصل ضرب و/أو قسمة وحدات المقادير الأساسية فقط. فمثلا وحدة القوة في النظام الدولي هي النيوتن الذي يساوي كيلوغرام مضروبا بالمتر ومقسوما على مربع الثانية ($1N=1kg.m/s^2$). ونستفيد مما تقدم للتأكد من صحة المقادير التي نستخدمها في الفيزياء عموما.

في مطبوعة دروسنا هذه والمخصصة لطلاب السنة الأولى (فيزياء رياضيات) في الصفوف التحضيرية للمدارس والجامعات والتي تحتوي على ثمانية فصول من الدروس متسلسلة وفق البرنامج الرسمي لمقياس الميكانيك المعروف باسم (فيزياء 2) متبوعة في نهاية كل فصل ببعض التمارين والتي يكون بعضها محلول، غالبًا ما تكون الحلول مفصلة وتسمح للطالب بإكمال فهمه للدرس وإجراء تقييمه الخاص.

تناول الفصلان الأول والثاني الأدوات الرياضية، لا سيما الأدوات المستخدمة لتبسيط كتابة المقادير الفيزيائية، ومختلف معادلات الأشعة التي تتناول المقادير السلمية والشعاعية. بينما يتناول الفصل الثالث علم الحركة، متبوعا بمفهوم الحركة النسبية، أما الفصل الخامس فيتناول علم التحريك للنقطة المادية ومسببات الحركة والنظريات الأساسية للديناميك، ثم يلي ذلك فصل الطاقة والعمل، ويتناول الفصلان الأخيران دراسة توازن وسكون المواد الصلبة والارتباطات المختلفة بين المواد والمعادلات التي تحكمها، متبوعا بفصل التصادمات المرنة اللينة.

الفصل الأول : التحليل البعدي للمقادير الفيزيائية

1- المقادير الفيزيائية ونظام الوحدات الدولي

1-1 تحليل الأبعاد للكميات الفيزيائية

إن ضرورة التحكم في مفاهيم أبعاد المقادير الفيزيائية، يسمح بالاستخدام الجيد للعلاقات التي تربط القوانين الفيزيائية ببعضها، وكذا تدارك الأخطاء المرتكبة في المعادلات من خلال دراسة تجانسها. سنرى في هذا الجزء كيفية تحديد بعد مقدار فيزيائي ومعادلة أبعاد العلاقات بين المقادير الفيزيائية، واستعمالات التحليل البعدي كأداة لدراسة تجانس المعادلات.

أولا مفهوم المقدار الفيزيائي (grandeur physique): هو كل مقدار قابل للقياس، كما يمكن مقارنته بمقدار آخر من نفس الطبيعة، و قد صنفت إلى 7 مقادير في وحدة النظام الدولي، نرتبها في الجدول التالي.

الجدول.1: المقادير الأساسية و رموزها في جملة الوحدات الدولية

المقدار الفيزيائي	الطول	الزمن	الكتلة	شدة التيار	الشدة الضوئية	كمية المادة	الحرارة
الرمز	L	T	M	I	J	N	Θ
الوحدة	m	S	kg	A	Cd (candela)	mol	K(*degré kelvin*)

أما المقادير الفيزيائية المشتقة فهي كل الكميات الفيزيائية المتبقية ماعدا السبعة التي ذكرت في الجدول.

2-1- مفهوم بعد المعادلات Equation aux dimensions

نسمي المعادلة ذات أبعاد للمقدار الفيزيائي [G] كل معادلة فيزيائية تكون على الشكل التالي:

$$[G] = M^{\alpha} L^{\beta} T^{\delta} \qquad (1.1)$$

حيث M، L، T هي المقادير الواردة في الجدول1، و يُستفاد من هذه العلاقة مثلا في معرفة وحدة المقدار الفيزيائي [G].

أما الأعداد الحقيقية α، β، δ تسمى بالتحليل البعدي للمقدار [G] ، ولتيسير ذلك نأخذ المثال البسيط في معادلة الحركة المستقيمة المنتظمة ذات الأبعاد للسرعة:

$$v = \frac{x}{t} \qquad (1.2)$$

هذه المعادلة لها الأبعاد:

$$[\mathrm{V}] = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}} = \mathrm{L.T^{-1}} \quad \rightarrow \quad \mathrm{m.s^{-1}}$$ إذن الوحدة

وعليه يمكن أن نكتب:

*– بعد جداء مقدارين هو جداء بعديهما: $[A.B] = [A].[B]$

*– بعد المقدار $[A]^n = [A^n] = A^n$ حيث n مقدار حقيقي بدون بعد (أي مقدار بدون بعد فيزيائي فهو بدون وحدة)

*– للدوال الجيبية واللوغاريتمية والاسية، $\cos(u)$ ، $\sin(u)$ ، $\ln(u)$ ، e^u ، $\tan(u)$ يكون المقدار u بدون بعد فيزيائي.

أمثلة على ذلك:

*– التسارع :

$$a = \frac{v}{t} \tag{1.3}$$

$$[a] = \frac{\mathrm{LT^{-1}}}{\mathrm{T}} = \mathrm{L.T^{-2}} \quad \rightarrow \quad \mathrm{m.s^{-2}}$$ إذن الوحدة

*– القوة:

$$F = m.a \tag{1.4}$$

$$[\mathrm{F}] = [\mathrm{m}].[a] = \mathrm{MLT^{-2}} \quad \rightarrow \quad \mathrm{kgm.s^{-2}}$$ إذن الوحدة

*– العمل:

$$W = F.l \tag{1.5}$$

$$[\mathrm{W}] = \mathrm{ML^2T^{-2}} \quad \rightarrow \quad \mathrm{kgm^2.s^{-2}}$$ إذن الوحدة

*– العزم (القوة في الذراع)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{1.6}$$

$$[\mathrm{F}] = \mathrm{ML^2T^{-2}} \quad \rightarrow \quad \mathrm{kgm^2.s^{-2}}$$ إذن الوحدة

*– كمية الحركة

$$\vec{P} = m\vec{v} \tag{1.7}$$

$$[\mathrm{P}] = \mathrm{MLT^{-1}} \quad \rightarrow \quad \mathrm{kgm.s^{-1}}$$ إذن الوحدة

*– أبعاد سماحية المكثفة:

$$C = \varepsilon\,\frac{s}{d} \rightarrow [\varepsilon] = [\mathrm{C}].\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L^2}} = [\mathrm{C}]\mathrm{L^{-1}} \tag{1.8}$$

$$[\mathrm{C}] = \mathrm{I}^2\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^{-2}\mathrm{T}^4 \quad \rightarrow [\varepsilon] = \mathrm{I}^2\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^{-3}\mathrm{T}^4 = (\mathrm{I}^2\,\mathrm{T}^2).(\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^2\mathrm{L}^{-1}).(\mathrm{L}^{-2}) \qquad (1.9)$$

ومنه

$$[\mathrm{Q}]^2 = \mathrm{I}^2\,\mathrm{T}^2 = \mathrm{C}^2 \quad , \quad [\mathrm{F}]^{-1} = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^2\mathrm{L}^{-1} = \mathrm{N}^{-1} \quad , \quad [\mathrm{L}]^{-2} = \mathrm{m}^{-2} \qquad (1.10)$$

$$[\varepsilon] = \mathrm{C}^2\mathrm{N}^{-1}\mathrm{m}^{-2} \qquad (1.11)$$

*- و في الحالة العامة تكون المعادلة ذات الأبعاد الفيزيائية للمقدار [G] بالشكل التالي:

$$[G] = M^{\alpha}L^{\beta}T^{\delta}I^{e}\theta^{s}N^{d}J^{k} \qquad (1.12)$$

حيث J, N, Θ, I, T, L, M هي المقادير الفيزيائية الأساسية الواردة في الجدول 1.

*- التحقق من تجانس عبارة الدور النواس البسيط التي تعطى بالعبارة التالية:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (1.13)$$

حيث g الجاذبية الأرضية و l طول النواس

لكي تكون المعادلة متجانسة يجب أن يكون بُعد الطرف الأول للمعادلة يساوي بعد الطرف الثاني.

بُعد الطرف الأول: [T]

بُعد الطرف الثاني :

$$[T] = \left[2\pi\sqrt{l/g}\right] = [l]^{1/2}.[g]^{-1/2} \qquad (1.14)$$

$$[g] = LT^{-2} \quad , \quad [l] = L \qquad (1.15)$$

لدينا أن:

$$[l]^{1/2}.[g]^{-1/2} = L^{1/2}L^{-1/2}\,(T^{-2})^{-1/2} = T \qquad (1.16)$$

ومنه بُعد الطرف الأول يساوي بُعد الطرف الثاني أي أن المعادلة متجانسة.

*- تعطى الطاقة الميكانيكية لجسم بالعلاقة:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \qquad (1.17)$$

حيث m كتلته g تسارع الجاذبية الأرضية و v سرعته و h ارتفاع الجسم عن سطح الأرض. تأكد من توافق الأبعاد في هذه العلاقة.

$$[E] = [M]\frac{[L]^2}{[T]^2} + [M]\frac{[L]^2}{[T]^2} \qquad (1.18)$$

إذن الوحدة الجول هي $[E] = [M][L]^2[T]^{-2} \quad \rightarrow \quad kgm^2s^{-2} = J$

وهي علاقة متجانسة لأن لها أبعاد الطاقة.

*– استخدم سائق سيارة العلاقة التالية لتحديد بعد السيارة عنه بدلالة الزمن:

$$x = \frac{1}{2}\, v_0 t^2 + vt \qquad (1.19)$$

حيث x و v مكان السيارة وسرعتها في اللحظة t ، بينما v_0 سرعتها الابتدائية.

نكتب أبعاد المعادلة:

$$[L]^? = [M]\frac{[L]}{[T]}[T]^2 + \frac{[L]}{[T]}[T] \qquad (1.20)$$

حيث [L]/[T] بعد السرعة المساوي لمسافة مقسومة على زمن، ومن ثم يكون $[L]^? = [L][T] + [L]$

ونلاحظ أن أبعاد الطرف الأيمن تختلف عن أبعاد الطرف الأيسر، أي أن المعادلة غير صحيحة.

تمرين 01:

اوجد بعد ووحدة الجاذبية

الحل:

لدينا من قانون الجذب العام

$$F = G\frac{mM}{r^2} = gm \qquad (1.21)$$

G : معامل الجاذبية العام.

m, M: كتلتان متجانستان

r: البعد بين M و m

g: تسارع الجاذبية الناتجة بين M و m

$$F = gm = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (1.22)$$

$$[F] = \mathrm{MLT^{-2}} \qquad (1.23)$$

إذن

$$G = \frac{Fr^2}{mM} \qquad (1.24)$$

$$[G] = \frac{[F][r^2]}{[m][M]} = \frac{\mathrm{MLT^{-2}L^2}}{M^2} \qquad (1.25)$$

وفي الأخير

$$[G] = \mathrm{M^{-1}L^3T^{-2}} \rightarrow \quad kg^{-1}\mathrm{m^3s^{-2}} \qquad (1.26)$$

تمرين 02:

استخدام الطريقة العكسية في تعيين الثوابت

مستخدما نظرية توافق الإبعاد والوحدات، اشتق في معدلة الطاقة لجسم كتلته m يتحرك بسرعة ثابتة v .

الحل:

كما سبق وأن اشرنا احسب المعادلة (1.1) يمكن التعبير عن أي مقدار فيزيائي وفقا لنظرية الأبعاد بالشكل التالي:

$$\mathrm{A} = \mathrm{L}^{\alpha}\mathrm{M}^{\beta}\mathrm{T}^{\gamma} \qquad (1.27)$$

حيث الأسس (α,β,γ) من الممكن ان تكون اعداد سالبة أو موجبة أو معدومة كما يمكن أن تكون أعداد كسرية، في هذا المثال من المعلوم أن وحدة قياس الطاقة الحركية هي الجول وعليه فإن:

$$J = kg\frac{m^2}{s^2} \qquad (1.28)$$

$$[M]^1[LT^{-1}]^2 \qquad (1.29)$$

$$[L]^{\alpha}[M]^{\beta}[T]^{\delta} \ \rightarrow (\alpha,\beta,\gamma) = (1,2,-2) \qquad (1.30)$$

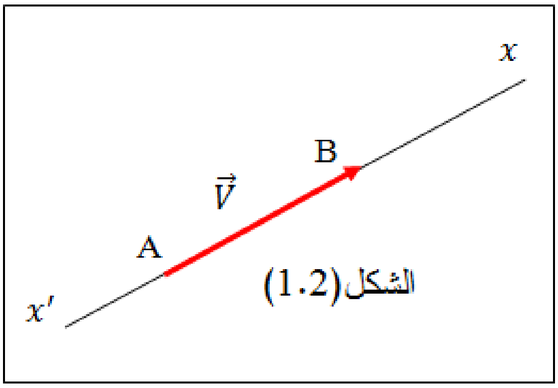
الفصل الثاني: الأشعة

1- المقادير السلمية والمقادير الشعاعية

1-1- المقادير السلمية: وهي مقادير عددية تحدد قيمة الشيء، ولا تحتاج إلى مَعْلَمٍ أو مرجع يعبر عنها، كالكتلة والزمن والطاقة إلى غير ذلك.

1-2- المقادير الشعاعية: وهي المقادير التي تتميز بالخصائص التالية

- المنحى أو الحامل للشعاع $\vec{V}$ هو المحور $(x'x)$
- A نقطة التأثير أو بداية الشعاع $\vec{V}$
- اتجاه الشعاع $\vec{V}$ من A إلى B
- القيمة السلمية $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\vec{V}\|$



الشكل(1.2)

مثال: القوة $\vec{F}$ والسرعة $\vec{V}$. انظر الشكل (2-1)

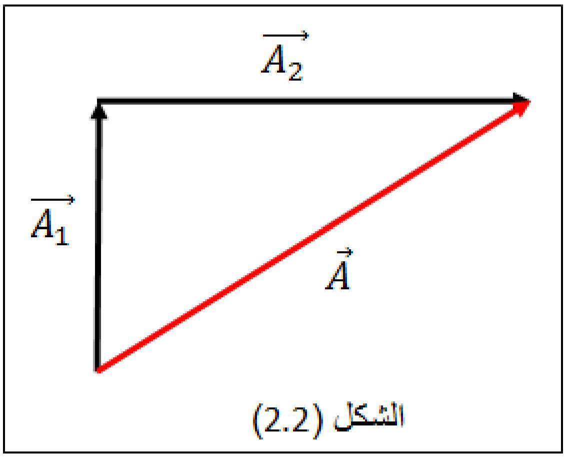
$\vec{V}$هذا الرمز يعبر عن الاتجاه والمقدار معاً

1-3- العمليات العنصرية على الأشعة

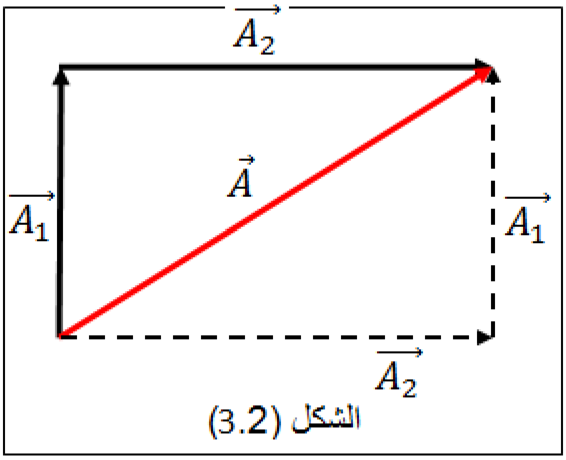
1-3-1- جمع وطرح الأشعة

أ- **الجمع الهندسي لعدة أشعة:** هو شعاع ينتج عن محصلة الأشعة بالجمع الشعاعي أنظر الشكل (2-2)، الشكل (2-3)، مثال1:

$$\vec{A} = \overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{A_2} \qquad (2.1)$$



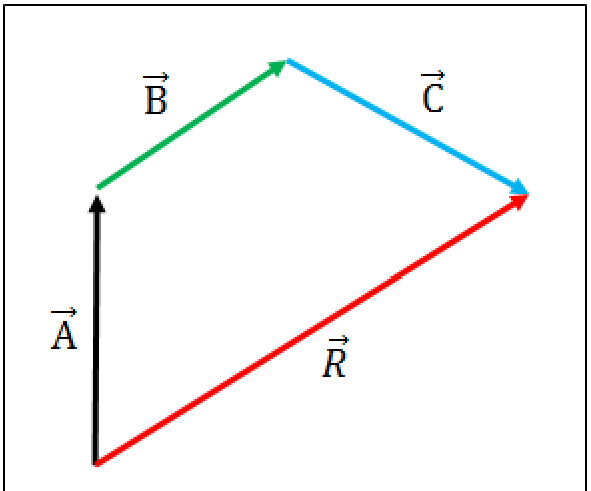
الشكل (2.2)



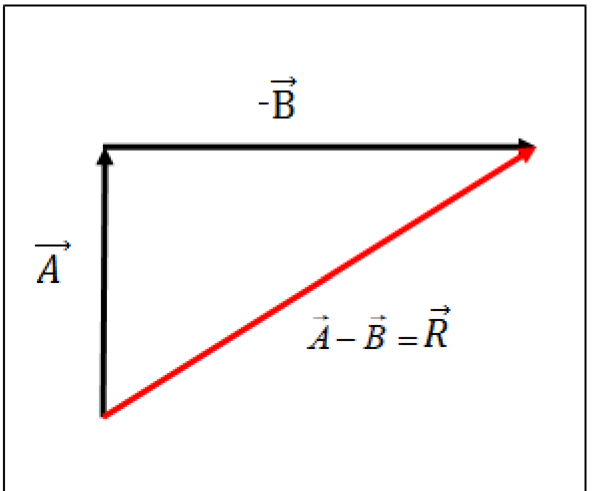
الشكل (3.2)

مثال 2: انظر الشكل (4.2)

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \qquad (2.2)$$



الشكل (4.2)



الشكل (5.2)

ب- طرح شعاعين

ليكن الشعاع $\vec{R}$ الذي يساوي $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$ هو نفسه جمع الشعاعين $\vec{R} = \vec{A} + (-\vec{B})$ مع تغيير اتجاه الشعاع $\vec{B}$ هندسيا، انظر الشكل (5.2)

2- الكتابة التحليلية للشعاع

2-1- مركبات شعاع في الفضاء

كل شعاع $\vec{A}$ في فضاء ثلاثة أبعاد له مركبات (A_x , A_y , A_z) على المحاور(Ox، Oy، Oz) ذات أشعة الوحدة $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ حيث يكتب $\vec{A}$ كما يلي:

$$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k} \qquad (2.3)$$

وطويلة الشعاع $\vec{A}$ هي :

$$\|\vec{A}\| = A = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2} \qquad (2.4)$$

وشعاع الوحدة له هو:

$$\vec{e_A} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}}{({A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2)^{1/2}} \qquad (2.5)$$

2-2- الجمع والطرح باستعمال الطريقة التحليلية

ليكن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ شعاعان حيث:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \qquad (2.6)$$

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k} \qquad (2.7)$$

جمع شعاعين $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

$$\vec{R} = \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right) + \left(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}\right) \qquad (2.8)$$

ومنه: $\vec{R}$

$$\vec{R} = (A_x + B_x)\vec{i} + \left(A_y + B_y\right)\vec{j} + (A_z + B_z)\vec{k} \qquad (2.9)$$

طرح شعاعين: $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$ يصبح

$$\vec{R} = (A_x - B_x)\vec{i} + \left(A_y - B_y\right)\vec{j} + (A_z - B_z)\vec{k} \qquad (2.10)$$

2-3- جداء الأشعة أو ضرب الأشعة: هناك نوعين من ضرب الأشعة

***- الجداء السلمي: ونرمز له** $\vec{A} \cdot \vec{B}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot cos\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) = A \cdot B\, cos\left(\vec{A}, \vec{B}\right) \qquad (2.11)$$

وهو مقدار سلمي

2-4- خصائص الجداء السلمي

*- الجداء السلمي تبديلي

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \qquad (2.12)$$

*- الجداء السلمي توزيعي على الجمع

$$\vec{A} \cdot \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \qquad (2.13)$$

2-5- حالات خاصة

* إذا كان $\vec{A} \perp \vec{B}$ $\Longleftarrow$ $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ $\Longleftarrow$ $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = 0$

* إذا كان $\vec{A} // \vec{B}$ $\Longleftarrow$ $\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B$ $\Longleftarrow$ $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = 1$

* الجداء السلمي لنفس الشعاع يعطي طويلة الشعاع

$$\vec{A} . \vec{A} = A^2 = \|\vec{A}\|^2 \qquad (2.14)$$

3- العبارة التحليلية للجداء السلمي

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left(A_x\vec{\imath}+A_y\vec{\jmath}+A_z\vec{k}\right)+\left(B_x\vec{\imath}+B_y\vec{\jmath}+B_z\vec{k}\right) \quad (2.15)$$

ومنه:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \quad (2.16)$$

ملاحظة:

يمكن الاستفادة من الجداء السلمي في حساب العمل الذي هو جداء شعاع القوة في شعاع الانتقال العنصري:

$$dw=\vec{F}\cdot\overrightarrow{dl} \quad (2.17)$$

3-1- الجداء الشعاعي

الجداء الشعاعي لشعاعين هو شعاع عمودي على المستوى المشكل أو المكون لهما، ونكتب:

$$\vec{A}\times\vec{B}=A\cdot B\cdot\sin\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\cdot\vec{e}_n \quad (2.18)$$

والناتج الحاصل بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يعبر عن مساحة متوازي الاضلاع.

3-2-خصائص الجداء الشعاعي

* الجداء الشعاعي غير تبديلي:

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A} \quad (2.19)$$

* الجداء الشعاعي لشعاعين متوازيين هو شعاع معدوم:

$$\vec{A}//\vec{B} \qquad \sin\left(\vec{A},\vec{B}\right)=0 \qquad \vec{A}\times\vec{B}=\vec{0} \quad (2.20)$$

* الجداء المختلط

$$\vec{V}=\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}.\left(\vec{C}\times\vec{A}\right) \quad (2.21)$$

* الجداء الشعاعي المضاعف

$$\vec{V}=\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\cdot\vec{B}-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\cdot\vec{C} \quad (2.22)$$

*- ملاحظة:

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\neq\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C} \quad (2.23)$$

4-1- العبارة التحليلية للجداء الشعاعي

ليكن الشعاعان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ حيث :

$$\vec{A}=A_x\vec{\imath}+A_y\vec{\jmath}+A_z\vec{k} \quad و \quad \vec{B}=B_x\vec{\imath}+B_y\vec{\jmath}+B_z\vec{k} \quad (2.24)$$

الجداء الشعاعي هو:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \qquad (2.25)$$

و منه:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\vec{\imath}-(A_xB_z-A_zB_x)\vec{\jmath}+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\vec{k} \qquad (2.26)$$

2-4- العبارة التحليلية للجداء المختلط

$$\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\begin{vmatrix}C_x & C_y & C_z\\ A_x & A_y & A_z\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix} \qquad (2.27)$$

و منه:

$$\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)C_x-(A_xB_z-A_zB_x)C_y+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)C_z \quad (2.28)$$

5- بعض العلاقات الهامة في أشعة الوحدة

ليكن ***(o, i, j, k)*** أشعة الوحدة للمعلم الكارتيزي:

$$\vec{\imath}.\vec{\imath}=\vec{\jmath}.\vec{\jmath}=\vec{k}.\vec{k}=i^2=j^2=k^2=1 \qquad (2.29)$$

$$\vec{\imath}\perp\vec{\jmath}\rightarrow\vec{\imath}.\vec{\jmath}=\vec{\jmath}.\vec{\imath}=0 \qquad (2.30)$$

$$\vec{\imath}.\vec{\jmath}=\vec{\imath}.\vec{k}=\vec{\jmath}.\vec{k}=0 \qquad (2.31)$$

$$\vec{\imath}X\vec{\jmath}=\vec{k}\ ;\quad \vec{\jmath}X\vec{k}=\vec{\imath}\ ;\quad \vec{k}X\vec{\imath}=\vec{\jmath} \qquad (2.32)$$

$$\vec{\jmath}X\vec{\imath}=-\vec{k}\ ;\quad \vec{k}X\vec{\jmath}=-\vec{\imath}\ ;\quad \vec{\imath}X\vec{k}=-\vec{\jmath} \qquad (2.33)$$

مثال 1:

عين الجداء السلمي للشعاعين، ثم أوجد الزاوية محصورة بينهما.

$$\vec{A}=2\vec{\imath}-3\vec{\jmath}+\vec{k} \qquad (2.34)$$

$$\vec{B}=3\vec{\imath}-\vec{\jmath}-2\vec{k} \qquad (2.35)$$

الحل : باستخدام العبارة التحليلية لعلاقة الجداء السلمي (2.16) :

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \qquad (2.36)$$

نجد أن:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(2).(3)+(-3).(-1)+(1).(-2)=7 \qquad (2.37)$$

أما بالصورة الهندسية فلدينا حسب العلاقة (2.11) العلاقة التالية:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|\cdot cos(\vec{A}\cdot\vec{B}) = A\cdot B\, cos(\vec{A},\vec{B}) \qquad (2.38)$$

نحسب طويلة الشعاعين كل على حدا:

$$A = \sqrt{(2)^2+(-3)^2+(1)^2} = \sqrt{14} \qquad (2.39)$$

$$B = \sqrt{(3)^2+(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{14} \qquad (2.40)$$

و تكون الزاوية :

$$\cos(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A\cdot B} = \frac{7}{\sqrt{14}\,.\sqrt{14}} = \frac{1}{2} \qquad (2.41)$$

ومنه :

$$\cos(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; \theta_{AB} = \frac{\pi}{3} \qquad (2.42)$$

مثال 2:

عين الجداء الشعاعي للشعاعين التاليين، ثم استنتج مقدار الزاوية بينهما؟

$$\vec{A} = (2,\ 1,-1);\quad \vec{B} = (1,0,-2) \qquad (2.43)$$

باستخدام العلاقة (2.25) نجد أن:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k} \qquad (2.44)$$

أما الزاوية، حساب طويلة الشعاعين أولا:

$$A = \sqrt{(2)^2+(1)^2+(-1)^2} = \sqrt{6} \qquad (2.45)$$

$$B = \sqrt{(1)^2+(0)^2+(-2)^2} = \sqrt{5} \qquad (2.46)$$

أما طويلة $|\vec{A}\times\vec{B}|$ فتكون :

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{(-2)^2+(3)^2+(-1)^2} = \sqrt{14} \qquad (2.47)$$

حسب العلاقة (2.18):

$$sin(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{|\vec{A}\times\vec{B}|}{A\cdot B} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}\sqrt{5}} = 0.68 \qquad (2.48)$$

ومنه:

$$\sin(\vec{A}\cdot\vec{B}) = 0.68 \;\rightarrow\; \theta_{AB} = 43^0 \qquad (2.49)$$

5-بعض العمليات تتعلق بالمؤثر $\vec{\nabla}$

يسمى هذا الرمز $\vec{\nabla}$ بالمؤثر نبلا Operateur Nabla

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad (2.50)$$

5-1-عبارة المؤثر في الإحداثيات الكارتيزية

* تدرج التابع السلمي $f(x,y,z)$ le gradient

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad (2.51)$$

*- تفاضل التابع السلمي: ليكن لدينا الانتقال العنصري

$$\overrightarrow{dl} = d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k} \qquad (2.52)$$

من المعادلة (2.51) و (2.52) نجد أن:

$$df = \left(\vec{\nabla}f \cdot \overrightarrow{dl}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}d_x + \frac{\partial f}{\partial y}d_y + \frac{\partial f}{\partial z}d_z \qquad (2.53)$$

* تفرق الحقل الشعاعي *La divergence*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = div\left(\vec{A}\right) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (2.54)$$

* تدوير الحقل الشعاعي $\vec{A}$ *Rotationnel* ويكتب:

$$\overrightarrow{Rot}\left(\vec{A}\right) = \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_X & A_y & A_z \end{vmatrix} \qquad (2.55)$$

مثال03:

ليكن الدالة السلمية التالية $f(x,y,z)$ حيث:

$$f(x,y,z) = xy + y^2 + xz \qquad (2.56)$$

*- احسب التدرج $\overrightarrow{grad}(f)$

*- نضع الشعاع $\vec{A} = \overrightarrow{grad}(f)$ احسب التفرق أو التباعد $div(\vec{A})$

*- احسب $\overrightarrow{rot}(\vec{A})$

الحل:

حسب المعادلة (2.51) فإن التدرج يكون كالتالي:

$$\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla} f = (y+z)\vec{\imath} + (x+2y)\vec{\jmath} + (x)\vec{k} \tag{2.57}$$

ومنه التفرق هو:

$$div(\vec{A}) = 0 + 2 + 0 = 2 \tag{2.58}$$

إما الدوران هو:

$$\overrightarrow{Rot}(\vec{A}) = (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (y+z) & (x+2y) & (x) \end{vmatrix} \tag{2.59}$$

ومنه:

$$\overrightarrow{Rot}(\vec{A}) = \left(\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial(x+2y)}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(y+z)}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial(x+2y)}{\partial x} - \frac{\partial(y+z)}{\partial y}\right)\vec{k} \tag{2.60}$$

إذن:

$$\overrightarrow{Rot}(\vec{A}) = (0-0)\vec{\imath} - (1-1)\vec{\jmath} + (1-1)\vec{k} = \vec{0} \tag{2.60}$$

تمرين 01:

اوجد جيوب تمام التوجيه مع المحاور الرئيسية، وكذا شعاع الوحدة للشعاع

$$\vec{A} = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 3\vec{k} \tag{2.61}$$

جيوب تمام التوجيه مع المحاور الرئيسية هي:

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(4)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{29} \tag{2.62}$$

ومنه:

$$cos\alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{4}{\sqrt{29}} \tag{2.63}$$

$$cos\beta = \frac{A_y}{A} = \frac{-2}{\sqrt{29}} \tag{2.64}$$

$$cos\gamma = \frac{A_z}{A} = \frac{-3}{\sqrt{29}} \tag{2.65}$$

أما شعاع الوحدة فيصح بالعلاقة التالية:

$$\vec{e}_A = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{29}} \qquad (2.66)$$

تمرين 02:

لتكن الأشعة التالية

$$\vec{A} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \qquad (2.67)$$

$$\vec{B} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \qquad (2.68)$$

$$\vec{C} = x\vec{i} + \vec{j} - y\vec{k} \qquad (2.69)$$

*– احسب $\vec{A} + \vec{B}$ ، $\vec{A}.\vec{B}$ $\vec{A}\,(\vec{A} + \vec{B})$

*– احسب مسقط الشعاع $\vec{A}$ على الشعاع $\vec{B}$

*– احسب الزاوية المحصورة بين $\vec{A}$ والشعاع $(\vec{A} + \vec{B})$

*– اوجد x و y حتى يكون الشعاع $\vec{C}$ متعامد مع كل من $\vec{A}$ و $\vec{B}$ في آن واحد.

الحل:

*– أما بالنسبة لجمع الأشعة فتجمع الحدود طرفا إلى طرف

$$\vec{A} + \vec{B} = (-2+2)\vec{i} + (1-1)\vec{j} + (3+1)\vec{k} = 4\vec{k} \qquad (2.70)$$

*– بتطبيق العبارة التحليلية الجداء السلمي كما في العلاقة (2.16) نجد:

$$\vec{A}.\vec{B} = (-2).(2) + (1).(-1) + (3).(1) = -2 \qquad (2.71)$$

*– ونفس الشيء بالنسبة $\vec{A}\,(\vec{A} + \vec{B})$

$$\vec{A}\,(\vec{A} + \vec{B}) = (-2).(0) + (1).(0) + (3).(4) = 12 \qquad (2.72)$$

*– مسقط الشعاع

$$P_{\vec{A}/\vec{B}} = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\vec{B}} = \frac{-2}{\sqrt{6}} \qquad (2.73)$$

*– حساب الزاوية المحصورة بين الشعاعين $\vec{A}$ و $(\vec{A} + \vec{B})$

$$cos\theta = \frac{\vec{A}.(\vec{A} + \vec{B})}{\|\vec{A}\|.\|\vec{A} + \vec{B}\|} = \frac{12}{\sqrt{144}} = \frac{3}{\sqrt{14}} \qquad (2.74)$$

$$\theta = Arccos\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) = 36.8^0 \qquad (2.75)$$

*– إيجاد x و y

$$\vec{C} \perp \overrightarrow{A} \rightarrow \vec{C}.\overrightarrow{A} = 0 \rightarrow \vec{C}.\overrightarrow{A} = (-2x) + (1) - (3y) = 0 \qquad (2.76)$$

$$\vec{C} \perp \overrightarrow{B} \rightarrow \vec{B}.\overrightarrow{C} = 0 \rightarrow \vec{B}.\overrightarrow{C} = (2x) - 1 - y = 0 \qquad (2.77)$$

بعد حل الجملتين نجد أن :

$$x = \frac{1}{2}, \qquad y = 0 \qquad (2.78)$$

تمرين 03:

لتكن الأشعة:

$$\overrightarrow{A} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 2\vec{k} \qquad (2.78)$$

$$\overrightarrow{B} = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k} \qquad (2.79)$$

$$\overrightarrow{C} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k} \qquad (2.80)$$

*- احسب $\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}$ و $\overrightarrow{A}.\overrightarrow{C}$ و $\overrightarrow{B}.\overrightarrow{C}$

*- احسب $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ و $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C}$ و $\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}$

*- اوجد الزاوية $(\overrightarrow{B}, \overrightarrow{C})$

*- أحسب مساحة متوازي الأضلاع المشكل من الأشعة $(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$ و $(\overrightarrow{B}, \overrightarrow{C})$

*- أحسب الجداء المضاعف $(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) \times \vec{C}$ و $\vec{A} \times (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C})$ ماذا تستنتج ؟

*- أحسب الجداء المختلط $(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}).\vec{C}$ و $(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}).\vec{A}$ و $(\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{A}).\vec{B}$

ماذا يمَثل هذا الجداء. ماذا تلاحظ ؟

الفصل الثالث : حركة النقطة المادية

تعريف 01: الحركة أو حركيات النقطة المادية: وهو علم يقتصر على دراسة الحركة دون التطرق إلى مسبباتها.

تعريف 02: النقطة المادية: هي جسيم طبيعي له كتلة مادية متناهية الصغر ومهملة الأبعاد.

الحركة والسكون مفهومان نسبيان فلمعرفة المقادير الفيزيائية في علم الحركة يجب أن تنسب هذه الأخيرة إلى مرجع (معلم) كالموضع والاتجاه.... الخ.

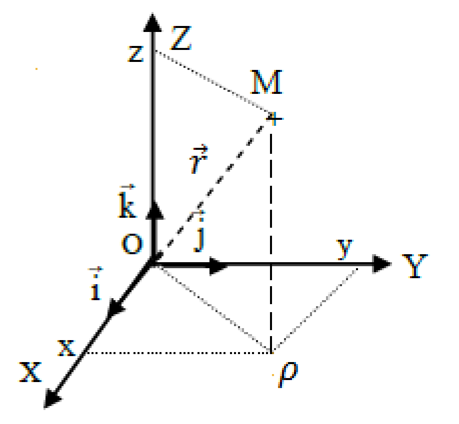
1- جملة الإحداثيات

لمعرفة المقادير الفيزيائية في علم الحركة ينبغي أن نربط المتحرك بجملة إسناد أو مرجع المرتبط بمعلم للزمن، معلم فضائي$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ + معلم زمني = جملة إسناد.

2- موضع المتحرك:

يعرف موضع المتحرك بشعاع يدعى شعاع الموضع، يحدد في معلم فضائي كارتـيـزي $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ بـ $\overrightarrow{OM}$ كما في الشكل (3.1) المقابل، حيث:

$$\overrightarrow{OM}=\vec{r}(t)=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k} \qquad (3.1)$$



الشكل (1.3)

2- شعاع الإزاحة أو شعاع الانتقال

يشغل المتحرك مواضع مختلفة أثناء حركته من النقطة M إلى النقطة 'M خلال أزمنة مختلفة الشكل(2.3)، فعند اللحظة t يكون عند النقطة M بينما في اللحظة 't يكون عند النقطة 'M

حيث: $\overrightarrow{\Delta r}=\overrightarrow{r'}(t)-\vec{r}(t)$

$$\overrightarrow{OM}=\vec{r}(t) \quad ، \quad \overrightarrow{OM'}=\vec{r}(t)$$

ومنه:

$$MM'=\overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OM}=\vec{r}(t)-\vec{r}(t)=\Delta\vec{r} \qquad (3.2)$$

يدعى $\overrightarrow{MM'}$ شعاع الازاحة أو شعاع الانتقال أو شعاع الانسحاب:

ملاحظة: عندما تقترب النقطة M' من النقطة M تكون الإزاحة صغيرة ندعو هذا الانتقال، بالانتقال العنصري أو الانسحاب العنصري.

3- شعاع الانتقال العنصري في مختلف الجمل

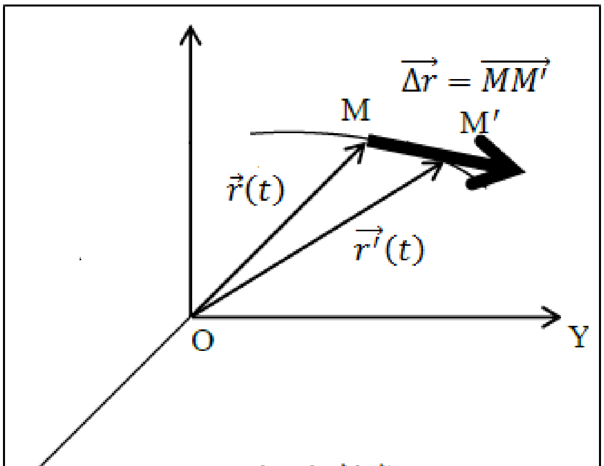
أ- في الإحداثيات الكارتيزية

* شعاع الإزاحة

$$\vec{r}(t) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \qquad (3.3)$$

* الإزاحة العنصرية

$$\overrightarrow{dr}(t) = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k} \qquad (3.4)$$



الشكل (2.3)

ب- الاحداثيات الاسطوانية

* شعاع الإزاحة

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k} \qquad (3.5)$$

* الإزاحة العنصرية أو الانتقال العنصري

$$d\vec{r}(t) = d\rho\cdot\vec{e}_\rho + \rho.d\theta.\vec{e}_\theta + dz.\vec{k} \qquad (3.6)$$

ج – الإحداثيات الكروية: شعاع الانتقال العنصري

$$d\vec{r} = dr.\vec{e}_r + r.d\theta.\vec{e}_\theta + r.\sin\theta\,.d\varphi.\vec{e}_\varphi \qquad (3.7)$$

4- شعاع السرعة: وتعرف السرعة بالمسافة المقطوعة خلال وحدة الزمن.

أ- **السرعة المتوسطة:** تعرف السرعة المتوسطة $\overrightarrow{V_m}$ للمتحرك بين الموضعين M_1 و M_2 والمحددة باللحظتين t_1 و t_2 على التوالي:

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{r}_2(t_2) - \vec{r}_1(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} \qquad (3.8)$$

ب- **السرعة اللحظية:** يعرف شعاع السرعة اللحظية لنقطة مادية في اللحظة t أنه مشتق شعاع الموضع بالنسبة لـ t

$$\vec{V}_t = \lim_{t\to\grave{t}} \frac{\overrightarrow{O\grave{M}} - \overrightarrow{OM}}{t - \grave{t}} = \lim_{t\to\grave{t}} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \qquad (3.9)$$

إذا كان شعاع الموضع المتحرك في معلم كارتيزي

$$\vec{r}(t) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \qquad (3.10)$$

$$\vec{V}_{\mathrm{t}} = \frac{dr(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \quad (3.11)$$

ونرمز كذلك:

$$\vec{V}_{\mathrm{t}} = \overrightarrow{\dot{r}(t)} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k} \quad (3.11)$$

***- خصائص شعاع السرعة**

- شعاع السرعة اللحظية $\vec{V}_{\mathrm{t}}$ يكون مماسا للمسار.

- اتجاه شعاع السرعة يكون وفق اتجاه الحركة.

5- شعاع التسارع الآني:

وبصورة مماثلة لتعريف السرعة الآنية، يُعبر التسارع الآني عن أنه مشتق شعاع السرعة الآنية بالنسبة للزمن.

$$\vec{a} = \lim_{\mathrm{t}\to\grave{\mathrm{t}}} \frac{\vec{\mathrm{V}}(\grave{\mathrm{t}}) - \vec{\mathrm{V}}(\mathrm{t})}{\grave{\mathrm{t}} - \mathrm{t}} = \lim_{\mathrm{t}\to\grave{\mathrm{t}}} \frac{\vec{\Delta}\mathrm{V}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{V}}}{\mathrm{dt}} \quad (3.12)$$

أو بالاشتقاق الثاني لشعاع الموضع ونكتب:

$$\vec{a} = \frac{d\overrightarrow{V_x}}{dt}\vec{\imath} + \frac{d\overrightarrow{V_y}}{dt}\vec{\jmath} + \frac{d\overrightarrow{V_z}}{dt}\vec{k} \quad (3.13)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \quad (3.14)$$

أ- مركبات شعاع التسارع في الإحداثيات الكارتيزية وهي

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k} \quad (3.12)$$

إذن:

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{dx^2}{dt^2} \\ a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = \dfrac{dy^2}{dt^2} \\ a_z = \dfrac{dV_z}{dt} = \dfrac{dz^2}{dt^2} \end{cases} \quad (3.12)$$

ب- طويلة شعاع التسارع الآني فتعطى بـ:

$$a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \quad (3.12)$$

ملاحظة: بعض الرموز المختصرة لتبسيط العلاقات

$$\begin{cases} a_x = \dot{V}_x = \ddot{x} \\ a_y = \dot{V}_y = \ddot{y} \\ a_z = \dot{V}_z = \ddot{z} \end{cases} \tag{3.12}$$

6- دراسة الحركة في نظم الإحداثيات المختلفة

6-1- الإحداثيات الكارتيزية

تقيد حركة الأجسام في المعلم الديكارتي (كارتيزي) بثلاث إحداثيات (x, y, z) تنسب إلى معلم $\vec{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ حيث يعطى شعاع الانتقال بـ:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{3.13}$$

ونكتب كذلك شعاع السرعة:

$$\vec{V} = \frac{dr(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt} \tag{3.14}$$

وشعاع التسارع:

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \tag{3.15}$$

6-2- الإحداثيات القطبية

عندما يتحرك جسيم في مستوي معين، فإن موقع الجسم يمكن وصفه (تعيينه) بدلالة متغيرين فقط هما: (r, Θ) حيث $\vec{r}$ متجه لموقع الجسيم " شعاع الانتقال" و Θ هي حاصل الزاوية التي يصنعها المتحرك مع المحور (ox).

أ- شعاع الانتقال

$$\vec{r} = r.\vec{e}_r \tag{3.16}$$

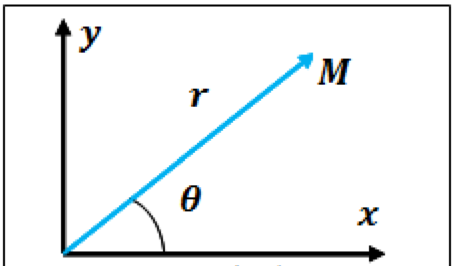
ب- معادلات التحويل بين الإحداثيات الديكارتية والقطبية: أنظر الشكل (4.3) و الشكل (3.3).

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\cos\theta \tag{3.17}$$

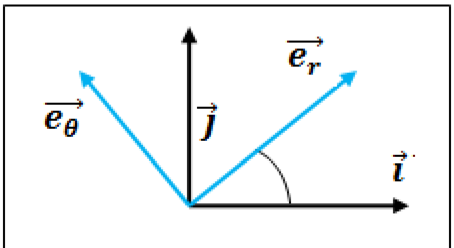
$$\sin\theta = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\sin\theta \tag{3.18}$$

$$x = r\cos\theta \tag{3.19}$$

$$y = r\sin\theta \tag{3.20}$$



الشكل (3.3)



الشكل (4.3)

ج- التحويلات العكسية هي: نربع المعادلتين ونجمع طرفا إلى طرف

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \mathrm{Sin}^2\theta) \quad (3.21)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.22)$$

البحث عن θ نقسم المعادلة (3.20) على (3.19) فنجد:

$$\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta = \frac{y}{x} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3.23)$$

د- العلاقات بين متجهات الوحدة

متجها الوحدة في الإحداثيات القطبية هما: $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

$\vec{e}_r$: محمول على الشعاع $\vec{r}$

$\vec{e}_\theta$: هو عمودي على $\vec{e}_r$ أو مماس للدائرة التي تصنعها الزاوية θ

$$\cos\theta = \frac{\vec{\imath}}{\vec{e}_r} \rightarrow \vec{\imath} = \vec{e}_r\cos\theta \quad (3.24)$$

$$\sin\theta = \frac{\vec{j}}{\vec{e}_r} \rightarrow \vec{j} = \vec{e}_r\sin\theta \quad (3.25)$$

بضرب المعادلة (3.24) في $\cos\theta$ والمعادلة (3.25) في $\sin\theta$ نجد أن:

$$\begin{cases} \cos\theta.\vec{\imath} = \cos^2\theta.\vec{e}_r \\ \sin\theta.\vec{j} = \sin^2\theta.\vec{e}_r \end{cases} \quad (3.26)$$

بالجمع طرفا إلى طرف نجد أن:

$$\vec{e}_r = (\cos\theta^2 + \sin\theta^2) = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{j} \quad (3.27)$$

ومنه نخلص إلى:

$$\vec{e}_r = cos\,\theta\,\vec{\imath} + sin\,\theta\,\vec{\jmath} \qquad (3.28)$$

وكذلك المعادلة

$$cos\,\theta = \frac{\vec{\jmath}}{\vec{e}_\theta} \rightarrow \vec{\jmath} = \vec{e}_\theta\, cos\,\theta \qquad (3.29)$$

$$sin\,\theta = \frac{-\vec{\imath}}{\vec{e}_\theta} \rightarrow -\vec{\imath} = sin\,\theta . \vec{e}_\theta \qquad (3.30)$$

بضرب المعادلة (3.29) في cos θ والمعادلة (3.30) في sin θ ثم الجمع طرفا إلى طرف نجد أن:

$$\begin{cases} cos\,\theta\vec{\jmath} = cos\,^2\theta . \vec{e}_\theta \\ -sin\,\theta\vec{\imath} = Sin\,^2\theta . \vec{e}_\theta \end{cases} \qquad (3.31)$$

بالجمع نحصل على:

$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \cos\theta\,\vec{\mathrm{j}} \qquad (3.32)$$

كتابة أشعة الوحدة الكارتيزية بدلالة أشعة الوحدة القطبية:

$$\begin{cases} \vec{e}_r\ = cos\,\theta\vec{\imath}\ +\ sin\,\theta\vec{\jmath} \rightarrow \times\, cos\,\theta \\ \vec{e}_\theta\ = sin\,\theta\vec{\imath}\ +\ cos\,\theta\vec{\jmath} \rightarrow\ \ \times\, Sin\,\theta \end{cases} \qquad (3.33)$$

$$\begin{cases} cos\,\theta\,\vec{e}_r\ = cos\,^2\theta\vec{\imath}\ + cos\,\theta sin\,\theta\vec{\jmath} \\ sin\,\theta\,\vec{e}_\theta\ = sin\,^2\theta\vec{\imath}\ +\ cos\,\theta sin\,\theta\vec{\jmath} \end{cases} \qquad (3.34)$$

بالطرح طرفا إلى طرف ينتج لدينا:

$$\vec{\imath} = cos\,\theta\,\vec{e}_r - sin\,\theta\ \ \vec{e}_\theta \qquad (3.35)$$

المرحلة الثانية نضرب المعادلة (3.32) في $sin\,\theta$ والمعادلة (3.28) في $cos\,\theta$

بالجمع:

$$\begin{cases} sin\,\theta\,\vec{e}_r\ = Sin\,\theta Cos\,\theta\vec{\imath}\ + Sin\,^2\theta\vec{\jmath} \\ cos\,\theta\,\vec{e}_\theta\ = -\,Cos\,\theta Sin\,\theta\vec{\imath}\ +\ cos\,^2\theta\vec{\jmath} \end{cases} \qquad (3.36)$$

فنحصل على المعادلة الأولى

$$\vec{j} = \sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\;\vec{e}_\theta \tag{3.37}$$

وبالمثل نجد البقية:

$$\begin{cases} \vec{i} = cos\,\theta\,\vec{e}_r - sin\,\theta\,\vec{e}_\theta \\ \vec{j} = sin\,\theta\,\vec{e}_r + cos\,\theta\,\vec{e}_\theta \end{cases} \tag{3.38}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = cos\,\theta\vec{i} + \; sin\,\theta\vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\,sin\,\theta\vec{i} + cos\,\theta\vec{j} \end{cases} \tag{3.39}$$

هـ- اشتقاق أشعة الانتقال

نعلم أن أشعة الوحدة للإحداثيات القطبية متحركة بالنسبة لـ $(O,\vec{i},\vec{j})$ إذن:

$$d\vec{e}_r = d\theta\sin\theta\,\vec{\imath} + d\theta\cos\theta\,\vec{\jmath} \tag{3.40}$$

$$d\vec{e}_r = +d\theta(-\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}) \tag{3.41}$$

$$\boxed{d\vec{e}_r = d\theta.\vec{e}_\theta} \tag{3.42}$$

و نفس الشيئ بالنسبة لشعاع الوحدة الثاني

$$d\vec{e}_\theta = -d\theta\cos\theta\,\vec{\imath} - d\theta\sin\theta\,\vec{\jmath} \tag{3.43}$$

$$d\vec{e}_\theta = -d\theta(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}) \tag{3.44}$$

$$\boxed{d\vec{e}_\theta = -d\theta.\vec{e}_r} \tag{3.45}$$

د- سرعة الجسم في الإحداثيات القطبية

كما هو معلوم فإن اشتقاق شعاع الانتقال $\vec{r}$ يعطي السرعة القطبية:

$$\vec{r} = r.\overrightarrow{e_r} \tag{3.46}$$

ويكون المشتق هو:

$$d\vec{r} = \;\vec{V} = dr.\vec{e}_r + r\,.d\vec{e}_r \tag{3.47}$$

$$\vec{V} = d\vec{r} = dr.\vec{e}_r + r\,(d\theta.\vec{e}_\theta) \tag{3.48}$$

$$\vec{V} = dr\,\vec{e}_r \; + r\,d\theta\,.\vec{e}_\theta = \;\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \tag{3.49}$$

$$\vec{V} = V_r\vec{e}_r + V_\theta\vec{e}_\theta \tag{3.50}$$

$$\begin{cases} V_r = dr \\ V_\theta = r.d\theta \end{cases} \tag{3.51}$$

نلاحظ أن للسرعة في الاحداثيات القطبية مركبتان: طولية أو شعاعية V_r (محمولة على الشعاع $\vec{r}$) وأخرى V_θ عرضية أو مماسية للدائرة التي تمسحها الزاوية θ.

هـ - شعاع التسارع في الإحداثيات القطبية

$$\vec{V} = dr\,\vec{e}_r + r\,do\,.\vec{e}_\theta \quad (3.52)$$

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad (3.53)$$

$$\vec{a} = dv = \ddot{r}\,.\vec{e}_r + r\,d\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\,\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\,\dot{\theta}\,d\,\vec{e}_\theta \quad (3.54)$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\,.\overrightarrow{e_r} + r\,\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\,\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - \dot{r}\,\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} \quad (3.55)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - \dot{r}\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (r\dot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta} \quad (3.56)$$

المركبة الطولية $a_r = \ddot{r} - \dot{r}\dot{\theta}^2$

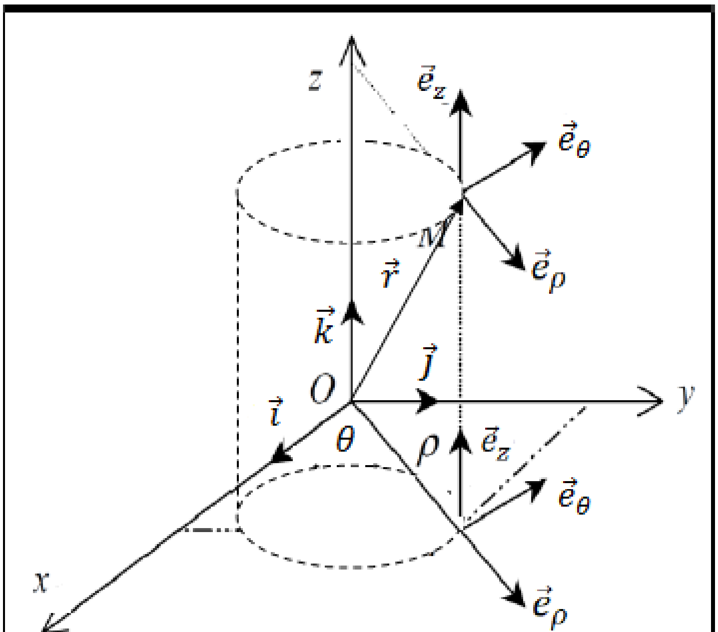
المركبة العرضية $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$

6-3- الإحداثيات الاسطوانية

يوصف موضع الجسم في فضاء الإحداثيات الاسطوانية بثلاث متغيرات (ρ, θ, z) في معلم اشعة وحدته: $R(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$

أ- **شعاع الانتقال**: يعطى شعاع الانتقال الذي يمسح الاسطوانة بالشكل التالي، انظر الشكل (5.3)

$$\vec{r} = \rho.\vec{e}_\rho + z.\vec{k} \quad (3.57)$$


الشكل (5.3)

ب- معادلات التحويل بين المعلم الديكارتي والاسطواني

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho.\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad (3.58)$$

و منه نستنتج أن:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.59)$$

كما يمكننا استنتاج زاوية المسح θ بين المحور ρ و المحور (ox) في المستوي (oxy).

$$\theta = Arc\cos\frac{x}{\rho} = Arc\sin\frac{y}{\rho} = Arc\ tg\frac{y}{x} \qquad (3.60)$$

ملاحظة: إذا كان $z = 0$ نتحول إلى الإحداثيات القطبية.

الطريقة 02 : لاستنتاج (x, y, z) لدينا الانتقال يكتب:

$$\vec{r} = \rho.\overrightarrow{e_\rho} + z.\vec{k} \qquad (3.61)$$

نعلم أن:

$$\overrightarrow{e_\rho} = \cos\theta\ \vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \qquad (3.62)$$

إذن يصبح:

$$\vec{r} = \rho\cos\theta\ \vec{\imath} + \rho\sin\theta\,\vec{\jmath} + z.\vec{k} \qquad (3.63)$$

من جهة أخرى لدينا الشعاع $\vec{r}$ في الإحداثيات الكارتيزية يكتب بالشكل التالي:

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z.\vec{k} \qquad (3.64)$$

$$\vec{r} = \rho\cos\theta\ \vec{\imath} + \rho\sin\theta\,\vec{\jmath} + z.\vec{k} \qquad (3.65)$$

بمطابقة المعادلتين (3.64) و (3.65) نجد أن:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho.\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad (3.66)$$

ج- أشعة الوحدة الاسطوانية بدلالة الأشعة الكارتيزية

و تكتب بالعلاقة التالية

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\theta.\vec{\imath} + \sin\theta.\vec{\jmath} \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta.\vec{\imath} + \cos\theta.\vec{\jmath} \\ \vec{e}_z = \vec{k} \end{cases} \qquad (3.67)$$

د- شعاع السرعة في الإحداثيات الاسطوانية: باشتقاق شعاع الانتقال في المعادلة (3.57) نجد أن

$$\vec{V} = d\vec{r} = d\rho.\overrightarrow{e_\rho} + \rho.d\overrightarrow{e_\rho} + dz\vec{k} \qquad (3.68)$$

وحيث أن:

$$d\overrightarrow{e_\rho} = d\theta\ .\overrightarrow{e_\theta} \qquad (3.69)$$

$$\vec{V} = d\vec{r} = d\rho.\overrightarrow{e_\rho} + \rho.d\theta\ \overrightarrow{e_\theta} + dz\vec{k} \qquad (3.70)$$

$$\begin{cases} \vec{V} = \dot{\rho}.\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\vec{k} \\ \vec{V} = V_\rho\ .\overrightarrow{e_\rho} + V_\theta\ .\overrightarrow{e_\theta} + V_z\vec{k} \end{cases} \qquad \vec{k} = \overrightarrow{e_z} \qquad (3.71)$$

$$\begin{cases} V_\rho = \dot{\rho} \\ V_\theta = \rho.\dot{\theta} \\ V_z = \dot{z} \end{cases} \quad (3.72)$$

هـ- شعاع التسارع: وهو مشتق شعاع السرعة

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\,.\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \rho\,\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \rho\,\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - \rho\,\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_\rho} + \ddot{z}\vec{k} \quad (3.73)$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2).\overrightarrow{e_\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\vec{k} \quad (3.74)$$

و منه مركبات التسارع تكون كما يلي:

$$\begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \dot{\rho}\,\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases} \quad (3.75)$$

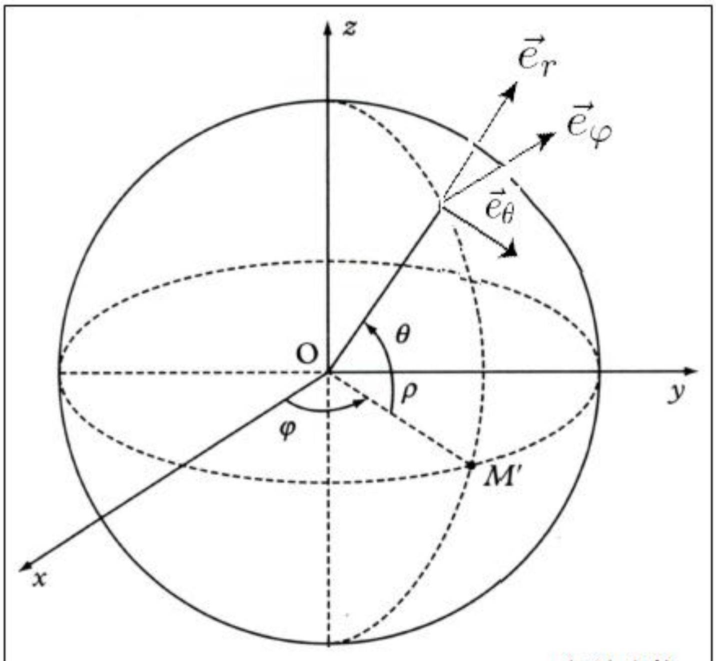
6-4- الإحداثيات الكروية

توصف الحركة بالإحداثيات الكروية بثلاث متغيرات $(r.\varphi.\theta)$ حيث يتغير كل من:

$$\begin{cases} r \in [0\ ,\ \infty[\\ \varphi \in [0\ ,\ 2\pi] \\ \theta \in [0\ ,\ 2\pi] \end{cases} \quad (3.76)$$

ب- شعاع الموضع

$$\vec{r} = r\,\overrightarrow{e_r} \quad (3.77)$$



الشكل (6.3)

لدراسة الإحداثيات الكروية نستعمل الإحداثيات الكارتيزية لتبسيط المعادلات وعليه فالشعاع $\vec{r}$ يكتب كذلك بالشكل:

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + \vec{k} \qquad (3.78)$$

بالإسقاطات على المحاور الرئيسية كما هو مبين في الشكل (6.3) نجد أن:

$$\begin{cases} x = \rho\, cos\, \varphi \\ y = \rho\, sin\, \varphi \\ z = r \sin\theta \\ \rho = r\sin\theta \end{cases} \qquad (3.79)$$

و حيث ان:

$$\begin{cases} x = \rho\, cos\, \varphi \\ y = \rho\, sin\, \varphi \\ z = r \sin\theta \\ \rho = r\sin\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = r\sin\theta\ \ cos\,\varphi \\ y = r\ sin\theta\ sin\,\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad (3.80)$$

وحسب المعادلة (3.78) فإن:

$$\vec{r} = (r\, sin\,\theta\, cos\,\varphi)\vec{\imath} + (r\, sin\theta\, sin\,\varphi)\vec{\jmath} + r\, cos\,\theta\,\vec{k} \qquad (3.81)$$

ج- أشعة الوحدة: من المعادلة الأخيرة (3.81) نستخرج r عامل مشترك فيصبح:

$$\vec{r} = r\left[sin\,\theta\, cos\,\varphi\vec{\imath} + sin\theta\, sin\,\varphi\vec{\jmath} + cos\,\theta\,\vec{k}\right] \qquad (3.82)$$

بمطابقة المعاداتين (3.77) و (3.82) نجد أن:

$$\overrightarrow{e_r} = \ sin\,\theta\, cos\,\varphi\vec{\imath} + sin\theta\, sin\,\varphi\vec{\jmath} + cos\,\theta\,\vec{k} \qquad (3.83)$$

المركبة الثانية بالنسبة للإحداثيات الكروية هي نفسها مركبة الإحداثيات الاسطوانية لأن الحركة تتم في المستوي (oxy) وعليه فإن:

$$\overrightarrow{e_\varphi} = \ -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath} \qquad (3.84)$$

بما أن أشعة الوحدة متعامدة فيما بينها فالمركبة الثالثة هي عبارة:

$$\overrightarrow{e_\theta} = \ \overrightarrow{e_\varphi} + \ \overrightarrow{e_r} \qquad (3.85)$$

وعليه فإن:

$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -\,sin\,\varphi & cos\,\varphi & O \\ sin\,\theta\, cos\,\varphi & sin\,\theta\, sin\,\varphi & cos\,\theta \end{vmatrix} \qquad (3.86)$$

$$\overrightarrow{e_\theta} = \vec{\imath}[cos\,\varphi\, cos\,\theta] + \vec{\jmath}[sin\,\varphi\, cos\,\theta] + \vec{k}[sin\,\theta\, sin^2\varphi - \ cos^2\varphi\, sin\,\theta] \qquad (3.87)$$

و في الأخير نحصل على المركبة الثالثة

$$\overrightarrow{e_\theta} = (\cos\varphi.\cos\theta)\,\vec{\imath} + (\sin\varphi.\sin\theta)\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k} \qquad (3.88)$$

تمرين 01: يعطى شعاع الموضع لمتحرك نقطي بالعبارة:

$$\vec{r}(t) = 4e^{-at}\vec{\imath} + 2(1 - e^{-2at})\vec{\jmath} \qquad (3.89)$$

1- عين مسار المتحرك من لحظة البداية حتى لحظة النهاية، مبينا نقطتي البداية والوصول.

2- عين سرعة المتحرك و تسارعه وكذلك الأطوال $r(t),\ v(t),\ a(t)$

3- ارسم المسار ومثل معه الأشعة $\vec{r}(t),\ \vec{v}(t),\ \vec{a}(t)$

4- عين أشعة الوحدة $\vec{e}_T\ ,\ \vec{e}_N\ ,\ \vec{e}_r\ ,\ \vec{e}_\theta$ وكذلك الزاوية $\theta(t)$

5- احسب المركبات $v_r\ ,\ v_\theta\ ,\ a_r\ ,\ a_\theta\ ,a_T\ ,a_N$

6- جد نصف قطر انحناء المسار $\rho(t)$

الحل:

1- شعاع الموضع

$$\vec{r}(t) = 4e^{-at}\vec{\imath} + 2(1 - e^{-2at})\vec{\jmath} \qquad (3.90)$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} \qquad (3.91)$$

$$\begin{cases} x(t) = 4e^{-at} \\ y(t) = 2(1 - e^{-2at}) \end{cases} \qquad (3.92)$$

نستنتج أن الزمن يوافق

$$t = -\frac{1}{a}\ln\frac{x}{4} \qquad (3.93)$$

و منه معادلة المسار

$$y = -\frac{1}{8}x^2 + 2 \qquad (3.94)$$

نقطة البداية توافق $t = 0$

$$(x_0\,, y_0) = (4, 0) \qquad (3.95)$$

أما نقطة الوصول توافق $t = \infty$

$$(x\,, y) = (0, 2) \qquad (3.96)$$

2- حساب السرعة

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{\jmath} \qquad (3.97)$$

$$\vec{v}(t) = -4ae^{-at}\vec{\imath} + 4ae^{-2at}\vec{\jmath} \qquad (3.98)$$

$$\vec{v}(t) = 4ae^{-at}(\vec{\imath} + e^{-at}\vec{\jmath}) \qquad (3.99)$$

التسارع

$$\vec{a}(t) = 4a^2e^{-at}(\vec{\imath} - 2e^{-2at}\vec{\jmath}) \qquad (3.100)$$

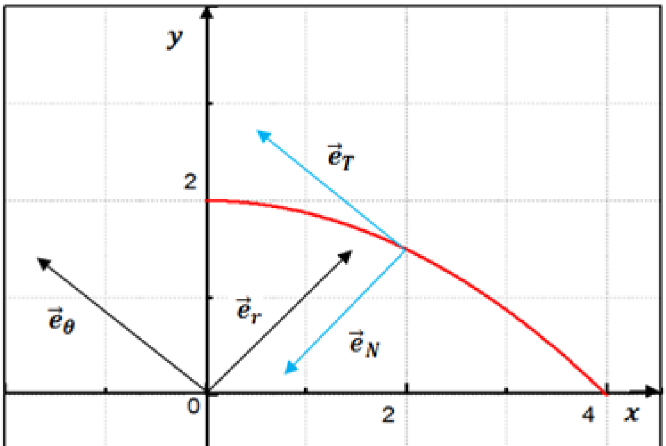
طويلة كل من الأشعة $r(t),\ v(t),\ a(t)$

$$\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{(4e^{-at})^2 + (2(1 - e^{-2at}))^2} \qquad (3.101)$$

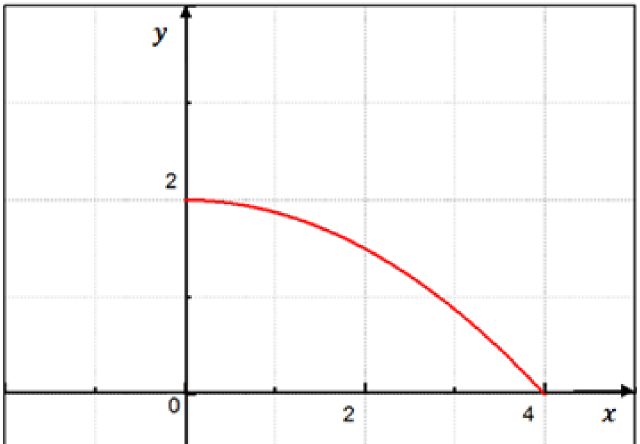
$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{(-4ae^{-at})^2 + (4ae^{-2at})^2} \qquad (3.102)$$

$$\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{(4a^2e^{-at})^2 + (-8a^2e^{-2at})^2} \qquad (3.103)$$

3- المسار انظر الشكل (7.3)



الشكل (8.3)



الشكل (7.3)

4- أشعة الوحدة انظر الشكل (8.3)

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}(t)}{\|\vec{r}(t)\|} = \frac{4e^{-at}\vec{\imath} + 2(1 - e^{-2at})\vec{\jmath}}{\sqrt{(4e^{-at})^2 + (2(1 - e^{-2at}))^2}} \qquad (3.104)$$

$$\vec{e}_T = \frac{\vec{v}(t)}{\|\vec{v}(t)\|} = \frac{4ae^{-at}(\vec{\imath} + e^{-at}\vec{\jmath})}{\sqrt{(-4ae^{-at})^2 + (4ae^{-2at})^2}} \qquad (3.105)$$

حساب $\vec{e}_N$ لدينا:

$$\vec{e}_N = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} \qquad (3.106)$$

من جهة أخرى لدينا

$$\vec{e}_N.\vec{e}_T = \vec{0} \qquad (3.107)$$

$$\vec{e}_N.\vec{e}_T = \left(\frac{4ae^{-at}(\vec{\imath} + e^{-at}\vec{\jmath})}{\sqrt{(-4ae^{-at})^2 + (4ae^{-2at})^2}}\right).(X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath}) = 0 \qquad (3.108)$$

$$\frac{-X+2Ye^{-at}}{(1+4e^{-2at})^{1/2}}=0 \qquad (3.109)$$

الشرط الأول $$-X+2Ye^{-at}=0 \qquad (3.110)$$

الشرط الثاني $$\|\vec{e}_N\|=1 \rightarrow \sqrt{(X)^2+(Y)^2}=1 \qquad (3.111)$$

من خلال المعادلتين (3.110) و (3.111) يمكن إيجاد مركبات الشعاع $\vec{e}_N$

إيجاد الزاوية المحصورة بين $(\vec{r},\vec{\imath})$

$$\vec{r},\vec{\imath}=\|\vec{r}\|.\|\vec{\imath}\|.\cos(\vec{r},\vec{\imath}) \qquad (3.112)$$

$$\cos(\vec{r},\vec{\imath})=\frac{\vec{r},\vec{\imath}}{\|\vec{r}\|.\|\vec{\imath}\|} \qquad (3.113)$$

$$cos(\vec{r},\vec{\imath})=\frac{4e^{-at}}{\sqrt{(4e^{-at})^2+\left(2(1-e^{-2at})\right)^2}} \qquad (3.114)$$

تمرين 02:

تعطى إحداثيات نقطة مادية بدلالة الزمن t في المعلم المستوي $(\mathrm{ox},\mathrm{oy})$ على النحو التالي:

$$\mathrm{x(t)=2t} \qquad (3.115)$$

$$\mathrm{y(t)=4t(t-1)} \qquad (3.116)$$

1- عين طبيعة المسار وارسمه في المعلم الديكارتي ثم حدد نقطة بداية الحركة و اتجاهها.

2- احسب عبارة شعاع السرعة عند اللحظة t ، ثم استخرج طويلته، حدد شعاع السرعة الابتدائية ومثله على الرسم.

3- بين بأن الحركة ذات تسارع ثابت، أحسب مركبته المماسية والناظمية ثم استنتج نصف قطر الانحناء.

4- ما هي اللحظة الزمنية التي من أجلها يكون شعاعا السرعة و التسارع متعامدين؟ مثلهما على المسار.

5- هل توجد لحظة زمنية يكون فيها الشعاعان متوازيين.

تمرين 03:

يسير قطاران على نفس السكة الحديدية المستقيمة ويتوجهان نحو بعضهما. سرعة أحدهما $130\ Km/h$ وسرعة الثاني $100\ Km/h$ بالنسبة للسكة، على بعد $3\ Km$ أنتبه السائقان معا للخطأ، فبادر كل منهما بكبح قطاره إذا تباطأ كل قطار بنسبة $1\,m/s^2$ فهل يتصادمان ؟

التمرين 04:

يجري مسافر متأخرا عن القطار خلف هذا الأخير بسرعة ثابتة $V = 8\,\mathrm{m/s}$ محاولا اللحاق بالقطار، يقلع القطار بتسارع ثابت $a = 0{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ عندما يكون المسافر على بعد $100\,\mathrm{m}$ من أخر عربة

هل يلحق المسافر بالقطار؟ إذا لم يلحق به ماهي أقل مسافة تفصل بينهما؟

ماهي السرعة التي يجب أن يتحرك بها حتى يصعد إلى القطار وكم المدة التي يستغرقها؟

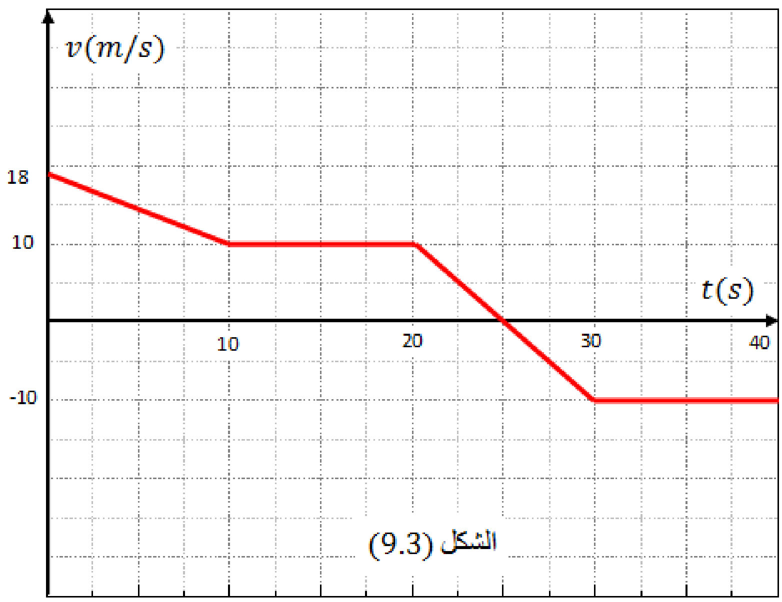
تمرين 05:

الشكل (9.3) يمثل مخطط السرعة لمحرك A في مسار مستقيم وفق المحور OX

*– مثل مخطط التسارع بدلالة الزمن

*– كم عدد أطوار الحركة وماهي طبيعة الحركة في كل طور

*– أوجد مواضع المتحرك في اللحظات $t = 12s$ ثم $t = 35s$ إذا كان $x(0) = 10m$



الشكل (9.3)

الفصل الرابع: الحركة النسبية

مقدمة

إن مفهوم الحركة من السكون مفهوم نسبي، يتعلق كل منهما بموضع المتحرك ومساره بالنسبة للمراقب، أكان ثابتا أم متحركا. فيما سبق ذكره كانت الحركة تنسب إلى معلم ثابت، بينما في الحركة النسبية، تنسب إلى أكثر من مراقب احدهما متحرك و الأخر ثابت. و لكي نميز اختلاف الموضع، المسار، السرعة والتسارع لنفس المتحرك حسب اختلاف المراجع نأخذ بعض الأمثلة منها:

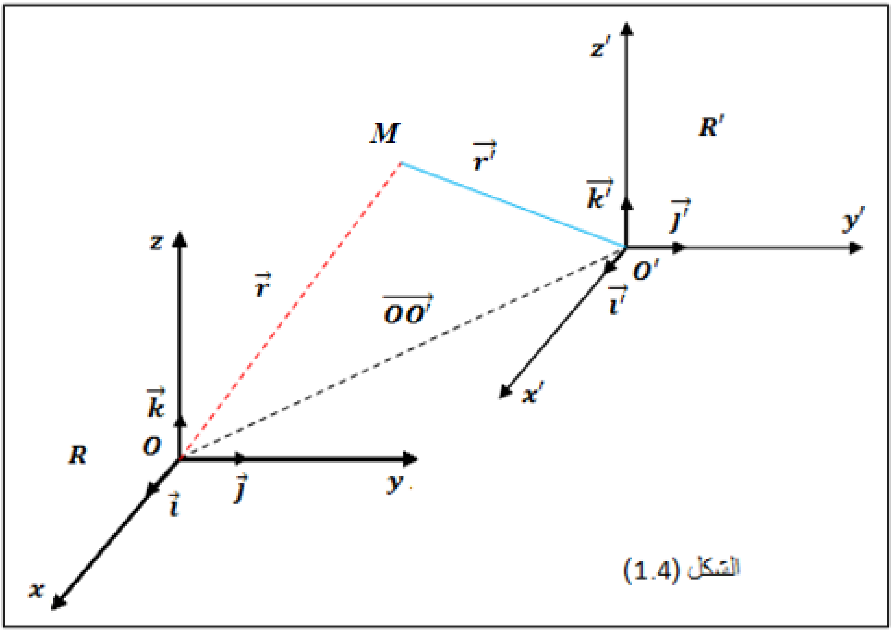
*– حركة قذيفة ترمي من طائرة تحلق أفقيا بسرعة ثابتة، فان المسار الذي يراه مراقب مرتبط بالطائرة هو مسار مستقيم شاقولي، بينما يظهر لمراقب ثابت مرتبط بالأرض قطعا مكافئا.

*– حركة نقطة مادية ملتصقة على حافة عجلة سيارة، يراها مراقب مرتبط بمحور العجلة، حركة دائرية منتظمة مع مسار دائري منتظم. بينما يراها مراقب على وجه الأرض حركة منحنية غير منتظمة بمسار على شكل أقواس متكررة.

سنقوم بوصف الحركة النسبية عندما تنتقل من جملة مرجعية متحركة إلى أخرى ثابتة، ومن الأهمية بمكان معرفة كيفية اشتقاق علاقات السرعة والتسارع وارتباط علاقاتهما بالمراقب الثابت و المتحرك. من اجل ذلك سنقوم بتحديد مرجعين:

*– المرجع الثابت أو المرجع الأساسي R ذو القاعدة $R(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. الشكل (1.4)

*– المرجع المتحرك بالنسبة إلى المرجع الثابت R' ذو القاعدة $R'(o',\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$. الشكل (1.4)



الشكل (1.4)

تعريف 1: تدعى حركة النقطة المادية M بالنسبة للجملة المتحركة R' **بالحركة النسبية** ومسارها يسمى **المسار النسبي** وسرعتها **بالسرعة النسبية** و يرمز لها بـ $\vec{V_r}$ أو $\vec{V}(M/R')$، وتسارعها **بالتسارع النسبي** ويرمز له بالرمز $\vec{a_r}$ أو $\vec{a}(M/R')$.

تعريف 2: تدعى حركة النقطة المادية M بالنسبة للجملة الثابتة R **بالحركة المطلقة** وسرعتها بالسرعة **المطلقة** و يرمز لها بـ $\vec{V_a}$ أو $\vec{V}(M/R)$، وتسارعها بالتسارع **المطلق** ويرمز له بالرمز $\vec{a}_a$ أو $\vec{a}(M/R)$.

تعريف 3: الحركة التي تقوم بها الجملة المتحركة بالنسبة للجملة الثابتة تدعى **بحركة الجر** وسرعتها تدعى **بسرعة الجر** $\vec{V_e}$ وتسارعها بالتسارع الجري $\vec{a}_e$ إذن:

بالنسبة للمراقب المرجع الأول يكون لدينا:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}\,(t) = x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath} + z.\vec{k} \qquad (4.01)$$

$$\vec{V}\,(t) = \frac{\vec{r}(t)}{dt} = \dot{x}.\vec{\imath} + \dot{y}.\vec{\jmath} + \dot{z}.\vec{k} \qquad (4.02)$$

$$\vec{a}\,(t) = \frac{\vec{V}(t)}{dt} = \ddot{x}.\vec{\imath} + \ddot{y}.\vec{\jmath} + \ddot{z}.\vec{k} \qquad (4.03)$$

بالنسبة للمراقب المرجع الثاني يكون لدينا:

$$\overrightarrow{r'}(t) = \overrightarrow{O'M}\,(t) = x'.\overrightarrow{\imath'} + y'.\overrightarrow{\jmath'} + z'.\overrightarrow{k'} \qquad (4.04)$$

$$\overrightarrow{V'}\,(t) = \frac{\overrightarrow{r'}(t)}{dt} = \dot{x}'.\overrightarrow{\imath'} + \dot{y}'.\overrightarrow{\jmath'} + \dot{z}'.\overrightarrow{k'} \qquad (4.05)$$

$$\overrightarrow{a'}\,(t) = \frac{\overrightarrow{V'}\,(t)}{dt} = \ddot{x}'.\overrightarrow{\imath'} + \ddot{y}'.\overrightarrow{\jmath'} + \ddot{z}'.\overrightarrow{k'} \qquad (4.06)$$

1- العلاقة بين أشعة الموضع

من خلال الشكل (1.4) نلاحظ أن:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \qquad (4.07)$$

ومنه حسب العلاقة (4.01) والعلاقة (4.04):

$$x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath} + z.\vec{k} = \overrightarrow{OO'} + x'.\overrightarrow{\imath'} + y'.\overrightarrow{\jmath'} + z'.\overrightarrow{k'} \qquad (4.08)$$

2- العلاقة بين أشعة السرعة

نحصل على سرعة النقطة M باشتقاق شعاع الموضع r بالنسبة للزمن فتصبح المعادلة (4.07).

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \qquad (4.09)$$

ومنه:

$$\dot{x}.\vec{\imath} + \dot{y}.\vec{\jmath} + \dot{z}.\vec{k} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \dot{x}'.\vec{\imath'} + \dot{y}'.\vec{\jmath'} + \dot{z}'.\vec{k'} + (x'.\frac{d\vec{\imath'}}{dt} + y'.\frac{d\vec{\jmath'}}{dt} + z'.\frac{d\vec{k'}}{dt}) \qquad (4.10)$$

لأن المعلم R' متحرك

كما سبق وأن اشرنا، سرعة النقطة المادية M بالنسبة للمعلم الثابت R هي السرعة المطلقة وتكتب بالشكل التالي:

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}.\vec{\imath} + \dot{y}.\vec{\jmath} + \dot{z}.\vec{k} \qquad (4.11)$$

أما السرعة النسبية فهي سرعة النقطة المادية M بالنسبة للمعلم المتحرك 'R وتكتب بالشكل التالي:

$$\vec{V}_r = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \dot{x}'.\vec{\imath'} + \dot{y}'.\vec{\jmath'} + \dot{z}'.\vec{k'} \qquad (4.12)$$

وأخيرا سرعة الجر، هي سرعة المعلم المتحرك R' بالنسبة للمعلم الثابت R تكتب بالشكل التالي:

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + (x'.\frac{d\vec{\imath'}}{dt} + y'.\frac{d\vec{\jmath'}}{dt} + z'.\frac{d\vec{k'}}{dt}) \qquad (4.13)$$

إذن السرعة المطلقة لنقطة مادية تساوي المجموع الهندسي لسرعة الجر والسرعة النسبية.

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \qquad (4.14)$$

3- العلاقة بين أشعة التسارع

بطبيعة الحال نشتق عبارة السرعة المطلقة بالنسبة للزمن فنحصل على عبارة التسارع المطلق. أما التسارع المطلق، أي تسارع النقطة المادية M بالنسبة للمعلم الثابت R يكتب بالشكل التالي :

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}.\vec{\imath} + \ddot{y}.\vec{\jmath} + \ddot{z}.\vec{k} \qquad (4.15)$$

و باشتقاق العلاقة (4.10) للمرة الثانية نحصل على:

$$\begin{aligned}\vec{a}_a = &\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'.\frac{d^2\vec{\imath'}}{dt^2} + y'.\frac{d^2\vec{\jmath'}}{dt^2} + z'.\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}\right) + \left(\ddot{x}.\vec{\imath'} + \ddot{y}'.\vec{\jmath'} + \ddot{z}'.\vec{k'}\right) \\ &+ 2\left(\dot{x}'.\frac{d\vec{\imath'}}{dt} + \dot{y}'.\frac{d\vec{\jmath'}}{dt} + \dot{z}'.\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)\end{aligned} \qquad (4.16)$$

من خلال المعادلتين الأخيرتين (4.15) و(4.16) نستنتج أن التسارع المطلق هو عبارة عن مجموع ثلاثة حدود:

*– التسارع النسبي، وهو تسارع النقطة M بالنسبة للمعلم المتحرك R' حيث:

$$\vec{a}_r = \ddot{x}.\overrightarrow{\imath'} + \ddot{y}'.\overrightarrow{\jmath'} + \ddot{z}'.\overrightarrow{k'} \qquad (4.17)$$

*– تسارع الجر، وهو تسارع المعلم المتحرك R' بالنسبة بالنسبة للمعلم الثابت R حيث:

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'.\frac{d^2\overrightarrow{\imath'}}{dt^2} + y'.\frac{d^2\overrightarrow{\jmath'}}{dt^2} + z'.\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2} \qquad (4.18)$$

*– أما الحد الثالث فهو تسارع كوريوليس:

$$\vec{a}_c = 2\left(\dot{x}'.\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + \dot{y}'.\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + \dot{z}'.\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right) \qquad (4.19)$$

إذن شعاع التسارع المطلق يساوي مجموع شعاع التسارع النسبي وشعاع تسارع الجر وشعاع تسارع كوريوليس.

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \qquad (4.17)$$

حالة خاصة:

*– إذا كان R' في حركة انسحابية بالنسبة لـ R فان أشعة الوحدة وفق محاور المعلم المتحرك $(o', \overrightarrow{\imath'}, \overrightarrow{\jmath'}, \overrightarrow{k'})$ ثابتة الاتجاه والحامل، وبالتالي فان مشتقاتها بالنسبة للزمن معدومة ومنه فان سرعة الجر مستقلة عن النقطة M ويكون لدينا:

$$\left(x'.\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + y'.\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + z'.\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right) = \vec{0} \qquad \vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \qquad (4.18)$$

وتصبح السرعة المطلقة كالتالي:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{V}_r + \vec{V}(O'/R) \qquad (4.19)$$

و تسارع كوريوليس يكون معدوما في هذه الحالة.

تمرين 01:

تتحرك سيارتان A وB على رواقين لطريق سيار مستقيم بسرعتي 110 km/h و90 km/h على التوالي. حدد شعاع السرعة بالنسبة لـ A بالنسبة لـ B في الحالتين:

*– تسير السيارتان في نفس الاتجاه.

*– تسير السيارتان في اتجاهين مختلفين.

*- السيارتين تسيران على طريقين متقاطعين الزاوية بينهما 30 درجة، فما هي السرعة النسبية للسيارة B بالنسبة للسيارة A.

الحل:

أ- تسير السيارتان في نفس الاتجاه (على نفس المحور)، فتعتبر إحداهما مراقب للأخرى، إذن سرعة A بالنسبة لـ B هو الفرق بين سرعتيهما، انظر الشكل (2.4).

$$\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B \qquad (4.20)$$

$$\vec{V}_{AB} = 110 - 90 = 20km/h \qquad (4.21)$$

ب- تسير السيارتان في اتجاهين مختلفين من نفس المحور، إذن سرعة A بالنسبة لـ B هو مجموع سرعتيهما، انظر الشكل (3.4).

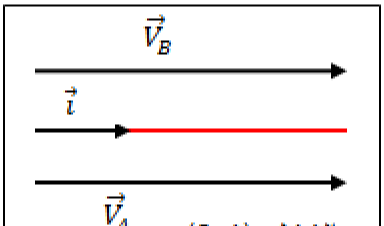
$$\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A + \vec{V}_B \qquad (4.22)$$

$$\vec{V}_{AB} = 110 + 90 = 200km/h \qquad (4.23)$$

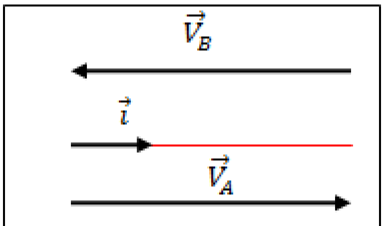
ج- الطريقان يتقاطعان بزاوية 30 درجة كما هو مبين في الشكل (4.4)، بإسقاط الأشعة على المحور نجد:

$$\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A \rightarrow V_{BA} = ({V_B}^2 + {V_A}^2 - 2V_B V_A \cos(30)\,)^{1/2} \qquad (4.24)$$

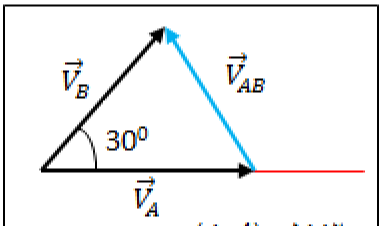
$$V_{BA} = (90^2 + 110^2 - 2(90)(110)\cos(30)\,)^{1/2} = \; 54.5km \qquad (4.25)$$



الشكل (2.4)



الشكل (3.4)



الشكل (4.4)

أما منحى السرعة النسبية فيتعين بحساب الزاوية المحصورة بين حامل السرعة $\vec{V}_A$ وحامل السرعة $\vec{V}_{AB}$ وذلك باستخدام العلاقات المثلثية حسب كالتالي:

$$\frac{V_B}{sin\alpha} = \frac{V_{BA}}{sin30} \rightarrow sin\alpha = \frac{V_B}{V_{BA}} sin30 \quad \rightarrow \alpha = 55.1\,^0 \qquad (4.26)$$

طبعا السرعة النسبية تبقى ثابتة في القيمة السلمية $V_{BA} = 54.5\text{km}$ يراها المرقب V_A بالنسبة إلى V_B تميل عنه بزاوية 51 درجة، بينما يراها المراقب V_B بالنسبة إلى V_A تميل عنه بزاوية (180−(30+55)=95) وهذا بالنسبة للحامل السرعة V_A.

تمرين 02:

تعطى إحداثيات متحرك R' في معلم ديكارتي ثابت ب:

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = t^2 - 4t + 1 \\ y = -2t^4 \\ z = 3t^2 \end{cases} \qquad (R) \qquad (4.27)$$

$$\overrightarrow{OM'}\begin{cases} x' = t^2 + t - 1 \\ y' = -2t^4 + 5 \\ z' = 3t^2 - 1 \end{cases} \qquad (R') \qquad (4.28)$$

علما أن محاور المعلمين تبقى دوما متوازية.

*− اوجد طبيعة حركة(R'/R)، و ما نوع هذه الحركة.

الحل:

طبيعة حركة R' بالنسبة إلى R:

$$\vec{V}_a(M/R) = \vec{V}_e(R'/R) + \vec{V}_r(M/R') \qquad (4.29)$$

ومنه

$$\vec{V}_e(R'/R) = \vec{V}_a(M/R) - \vec{V}_r(M/R') \qquad (4.30)$$

باشتقاق المعادلة (4.27) نجد $\vec{V}_a(M/R)$:

$$\vec{V}_a(M/R) = \begin{cases} \dot{x} = 2t - 4 \\ \dot{y} = -8t^3 \\ z = 6t \end{cases} \qquad (4.31)$$

باشتقاق المعادلة (4.28) نجد $\vec{V}_r(M/R')$:

$$\vec{V}_r(M/R') = \begin{cases} \dot{x}' = 2t + 1 \\ \dot{y}' = -8t^3 \\ \dot{z}' = 6t \end{cases} \qquad (4.32)$$

ومنه نخلص إلى:

$$\vec{V}_e(R'/R) = -5\vec{\imath} \qquad (4.33)$$

نلاحظ أن السرعة المكتسبة ثابتة هذا يدل أن حركة (R'/R) مستقيمة منتظمة، إذن المعلمان عطاليان(غالليان).

تمرين 03:

يسقط جسم M من أعلى عمارة على شخص متوقف على الطريق. عندما يكون الجسم على ارتفاع h من الطريق ينطلق الشخص جاريا بحركة متسارعة تسارعها a أوجد عبارة:

1- شعاع التسارع النسبي $\vec{a}_r$ للجسم M

2- شعاع السرعة النسبية $\vec{v}_r$ للجسم M

3- مسار الجسم المتحرك M بالنسبة للشخص.

الفصل الخامس : تحريك النقطة المادية

مقدمة

يختص علم التحريك (الديناميك) بدراسة الحركة ومسبباتها (بعكس ما ورد في علم الحركة). أي يدرس حركة الأجسام المادية تحت تأثير القوى الخارجية المؤثرة عليها، ويعتمد هذا العلم على قوانين الحركة التي وضعها كل من نيوتن ولاغرانج وهاملتون وغيرهم. في القرن السابع عشر وضع نيوتن ثلاثة قوانين نظرية لوصف حركة الجسم تحت تأثير قوى خارجية وهي على النحو التالي:

أ- **القانون الأول:** ويعرف بمبدأ العطالة ويسمى كذلك بقانون القصور الذاتي وينص على ما يلي: يبقى أي جسم على حالته التحريكية من سكون أو سرعة ثابتة (قيمة واتجاها) ما لم تؤثر عليه محصلة قوى خارجية غير معدومة، ونكتب:

$$F_T = 0 \rightarrow V = C^T \rightarrow a = 0 \qquad (5.01)$$

F_T: محصلة القوى المؤثر على الجسم

ب- **القانون الثاني:** يتناسب التغير في حركة الجسم مع القوى المؤثرة عليه (اتجاها وقيمة).

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \qquad (5.02)$$

ج- **القانون الثالث:** هناك لكل فعل رد فعل مساوٍ له في المقدار ومعاكسا له في الاتجاه.

2- المراجع (جمع مرجع) أو المعالم

لوصف حركة جسم يلزم تحديد محاور أو معالم، تسمى بالمحاور المرجعية، وتكون هذه المحاور ثابتة والسؤال هل المحاور على سطح الأرض تعتبر محاور مرجعية الجواب " لا " حيث أن الأرض هي الأخرى متحركة دورانيا حول محورها وكذلك تدور حول الشمس، من هنا جاءت النظرية النسبية لأنشتاين لحل مسألة المحاور المرجعية.

3- المعلم العطالي: المعلم العطالي هو المعلم الذي يتحقق فيه مبدأ العطالة.

3-1- أمثلة على المعالم العطالية

3-1- أ- معلم كبلر المركز الشمسي (Kepler): مبدؤه مركز الشمس ومحاوره تتجه نحو ثلاثة نجوم (يمكن اعتبارها ثابتة)

3-1- ب- معلم كوبرنيك (Copernic): مبدؤه مركز عطالة النظام الشمسي ومحاوره تتجه نحو ثلاثة نجوم (يستعمل هذا المعلم في دراسة الكواكب).

3-1- جـ - المعلم المركزي الأرضي: مبدؤه مركز الأرض ومحاوره تتجه نحو ثلاثة نجوم (يمكن اعتبارها ثابتة)، يستخدم لدراسة الأقمار مثلا.

3- 1- د - المعلم الأرضي (المعلم المخبري): مبدؤه سطح الأرض حيث توجد الدراسة أو التجربة ومحاوره متعامدة وثابتة خلال مدة التجربة.

4- القوة والكتلة

4-1- القوة: هي كل مؤثر خارجي يعمل على تغيير حالة الجسم.

4-2- الكتلة أو الجسم المادي: هو عبارة عن جملة نقاط مادية وهناك نوعان: الجسم الصلب حيث تبقى المسافة بين أجزائه ثابتة، والجسم المادي القابل للتشوه، وهي مقدار محفوظ، يُعبِّر عن عطالة الجسم.

5- الجملة المعزولة

نقول عن جملة ما أنها جملة معزولة إذا لم تكن خاضعة لأي تأثير خارجي ولا تؤثر هي في هذا الوسط الخارجي. وإذا كانت محصلة جميع القوى الخارجية المؤثرة في الجملة المادية تساوي الصفر ففي هذه الحالة نقول إن الجملة شبه معزولة، " يكون الجسم المادي معزلا ما لم تؤثر عليه قوى خارجية "

ملاحظة: مفهوم العزل فعليا غير ممكن إلا إذا كان منفردًا في الكون، لهذا نصطلح على أن الجسم المعزول هو الذي لا يخضع لتأثير خارجي.

6- مركز العطالة

في جملة نقاط الكتلة أو المادة المعزولة، هناك نقطة واحدة على الأقل ساكنة أو لها حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لمعلم عطالي وتسمى هذه النقطة بمركز العطالة (Centre d'inertie) والمنطبق على مركز ثقل الكتلة أو الجسم centre de gravité

7- شعاع الدفع الخطي

الدفع الخطي أو ما يعرف بكمية الحركة لنقطة مادية كتلتها m وسرعتها $\vec{V}$ بالنسبة لمعلم (R) كما يلي:

$$\vec{P} = m\,\vec{V} \qquad (5.03)$$

وشعاع الدفع الخطي لمجموعة نقاط مادية كتلة كل منهما m_i وسرعة كل منهما $\vec{V_i}$ هو:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{P_i} = \sum_i m_i\,\vec{V_i} \qquad (5.04)$$

$$\vec{P} = \sum_i m_i \frac{d\,\overrightarrow{OM_i}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_i\,\overrightarrow{OM_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum m_i\,\overrightarrow{OG}\right) \qquad (5.05)$$

$$\sum_i m_i \left(\frac{d\,\overrightarrow{OG}}{dt}\right) = m_i \overrightarrow{V_G} \qquad (5.06)$$

$\overrightarrow{V_G}$ سرعة مركز ثقل الجسم ككل.

8- المبدأ الأساسي للتحريك

القانون الثاني لنيوتن: في معلم عطالي، يتناسب تغير الدفع الخطي (مقدار كمية الحركة) مع محصلة القوى التي يخضع لها الجسم ويكون لهذا التغير نفس الاتجاه مع محصلة القوى المطبقة، ونكتب:

$$\sum F_{ex} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{V}\right) = m\,\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a} \qquad (5.07)$$

$\vec{a}$: يمثل تسارع مركز عطالة الجسم ووحدته (m/s^2)

m: كتلة الجسم المتحرك ووحدتها (kg)

$\sum F$: محصلة كل القوى الخارجية المطبقة على الجسم ووحدتها N .

هذا القانون يعتبر اللَبنة الأولى في الميكانيك الكلاسيكي وهو يصف الحركة انطلاقا من مفهوم القوة حيث اعتمدت عليه كل قوانين التحريك.

8-1- صلاحيات هذا القانون (المبدأ الأساسي للتحريك)

* القانون الثاني لنيوتن لا يصلح إلا في معلم عطالي (مبدؤه سطح الأرض ومحاوره متعامدة وثابتة).

* عند تطبيق هذا القانون يجب اعتبار الأجسام المادية نقاط لا أبعاد لها.

* لا يصلح هذا القانون إلا على المقادير الفيزيائية التي لا تتعدى سرعتها عُشر سرعة الضوء

8-2- الخطوات العامة في تطبيق القانون الثاني لنيوتن

- تحديد الجملة المدروسة برسم تخطيطي واضح.
- تحديد نوعية المسار (مستقيم- دائري- شاقولي).
- تحديد القوى المؤثرة على الجملة.
- اختيار معلم مناسب $R(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
- كتابة العلاقة الشعاعية للقانون الثاني.

- اسقاط هذه العلاقة على المحاور الأساسية
- تحديد المعادلات وضبط المسألة وتعيين المجاهيل

9- نظرية الدفع الزاوي: الدفع الزاوي لنقطة مادية بالنسبة لـ O هو عزم كمية الحركة لهذه النقطة بالنسبة لمركز الدوران O ، حيث :

$$\vec{L} = \overrightarrow{OM} \times \vec{P} \tag{5.08}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \tag{5.09}$$

مشتق الدفع الزاوي بالنسبة للزمن هو:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{P}\right) \tag{5.10}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} + \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{5.11}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{V} \times m\vec{V} + \vec{r} \times m\,\frac{dv}{dt} \tag{5.12}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{O} + \vec{r} \times m\frac{dv}{dt} \tag{5.13}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times m\,\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \tag{5.14}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{5.15}$$

حيث $\vec{\tau}$ هو عزم القوة المؤثرة على الجسيم

ملاحظة: إذا لم يكن الجسيم خاضع لقوة خارجية فإن:

$$\sum \vec{F}_i = \frac{d\,\vec{P}}{dt} = \vec{O} \tag{5.16}$$

الدفع الخطي ثابت:

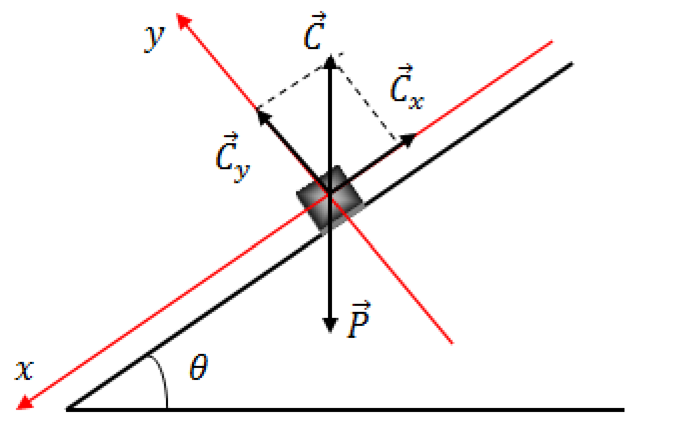
$$\vec{P} = C^t \tag{5.17}$$

10- قوة التلامس –قوى الإحتكاك: عند تلامس جسمين فإنه يحدث رد فعل متبادل بينهما "قانون الفعل و رد الفعل" كما هو مبين في الشكل (1.5) حيث عند تحليل المركبة $\vec{C}$ ينتج مايلي :مركبة $C_N = C_y$ و تكون

عمودية على سطح التماس وتمثل ردة فعل الجسم وتدعى المركبة الناظمية. أما المركبة $C_T = C_x$ تكون موازية لسطح التماس و تمثل قوة الإحتكاك بين الجسمين. و في حالة إنزلاق الجسم على السطح فإنه توجد نسبة ثابتة بين المركبتين العمودية والأفوقية.

$$\mu_c = \tan\alpha \frac{\|\vec{C}_x\|}{\|\vec{C}_y\|} \rightarrow C_x = \mu_c . C_y \qquad (5.17)$$

و تعرف هذه النسبة μ_c بمعامل الإحتكاك الإنزلاقي (الحركي) بين الجسمين و إن كان ساكنا (الجسم) تسمى النسب بـ: μ_s وتدعى بمعامل الإحتكاك السكوني.



الشكل (1.5)

تمرين 01:

نقطة مادية كتلتها m تتحرك تحت تأثير قوة $\vec{F}$ ، احسب سرعة النقطة المادية في اللحظة t ومعادلة الحركة إذا كانت:

أ) $\vec{F} = \vec{F}_0 sin(wt)$ مع $\overrightarrow{OM}(0)=\vec{0}$ ، $\vec{V}(0)=\vec{0}$

ب) $\vec{F} = -k\vec{v}$ مع $\overrightarrow{OM}(0)=\vec{0}$ ، $\vec{V}(0)=\vec{V}_0$

ج) $\vec{F} = -k\overrightarrow{OM}$ مع $\overrightarrow{OM}(0)=\overrightarrow{OM}_0$ ، $\vec{V}(0)=\vec{V}_0 // \overrightarrow{OM}_0$

حيث $\vec{F}_0$ شعاع ثابت، k , ω ثوابت موجبة.

الحل:

أ- بتطبيق المبدأ الاساسي للتحريك ينتج

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \tag{5.18}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \ \rightarrow \vec{F}_0 sin(wt) = m\vec{a} \tag{5.19}$$

$$\vec{F}_0 sin(wt) = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{5.20}$$

$$d\vec{v} \ = m\vec{F}_0 sin(wt)dt \tag{5.21}$$

$$\int d\vec{v} \ = \int m\vec{F}_0 sin(wt)dt \tag{5.22}$$

$$v \ = mF_0 \int sin(wt)dt \tag{5.23}$$

$$v(t) \ = -\frac{mF_0}{w}\cos(wt) + C_1 \tag{5.24}$$

نحسب الثابت من الشروط الابتدائية $\vec{v}(0) = \vec{0}$

$$v(0) \ = -\frac{mF_0}{w}\cos(0) + C_1 = +\frac{mF_0}{w} \tag{5.25}$$

و منه تصبح معادلة السرعة كالاتي:

$$v(t) \ = \frac{mF_0}{w}(1 - \cos(wt)) \tag{5.26}$$

معادلة الحركة :

$$v(t) \ = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \rightarrow d\overrightarrow{OM} = vdt \tag{5.27}$$

$$d\overrightarrow{OM} \ = \frac{mF_0}{w}(1 - \cos(wt))dt \tag{5.28}$$

$$\overrightarrow{OM} = \int d\overrightarrow{OM} = \frac{mF_0}{w}\int (1 - \cos(wt))dt \tag{5.29}$$

$$\overrightarrow{OM} = \int d\overrightarrow{OM} = \frac{mF_0}{w}\left(\int dt - \int \cos(wt))dt\right) \tag{5.30}$$

$$\overrightarrow{OM}(t) \ = \frac{mF_0}{w}\left(t - \frac{1}{w}\sin(wt)\right) + C_2 \tag{5.31}$$

بعد حساب الثابت من الشروط الابتدائية $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$

$$\overrightarrow{OM}(t) \ = \frac{mF_0}{w}\left(t - \frac{1}{w}\sin(wt)\right) \tag{5.32}$$

ب- نفس الشيء حساب سرعة المتحرك

$$-k\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{5.33}$$

$$\frac{d\vec{v}}{\vec{v}} = -mkdt \tag{5.34}$$

$$\int \frac{d\vec{v}}{\vec{v}} = -mk\int dt \tag{5.35}$$

$$\int \frac{d\vec{v}}{\vec{v}} = lnv = -mkt + C_1 \tag{5.36}$$

$$v(t) = Ce^{-mkt} \tag{5.37}$$

وكما سبق، من الشروط الابتدائية نحسب الثابت C، و بنفس الطريقة السابقة نستخرج معادلة الحركة.

تمرين 02:

تهتز نقطة مادية M كتلتها m حول محور أفقي oz عمودي على المستوي الشاقولي (ox,oy) للحركة، موضعها معرف في كل لحظة بإحداثياتها الديكارتية، أحسب:

1- عزم الثقل P بالنسبة للنقطة O ثم بالنسبة للمحور oz بدلالة m,x,g

2- العزم الحركي للنقطة M بالنسبة للنقطة O ثم بالنسبة للمحور oz. بدلالة m,x,y,x^2,y^2

3- جد معادلة الحركة بتطبيق نظرية العزم الحركي على النقطة M

الحل:

حساب عزم الثقل P بالنسبة للنقطة O

لدينا شعاع الموضع M انظر الشكل (2.5)

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{p} = mg\vec{j} \end{cases} \tag{5.38}$$

عزم الثقل P بالنسبة للنقطة O يكون :

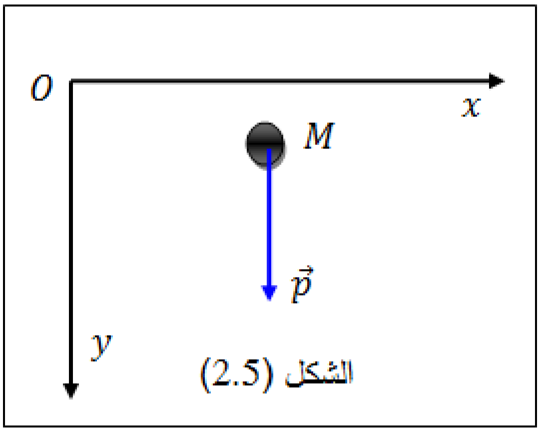
$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{P/o} = \overrightarrow{OM} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & mg & 0 \end{vmatrix} = mgx\vec{k} \tag{5.39}$$

عزم الثقل P بالنسبة للنقطة oz يكون :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{P/oz} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{P/o}.\vec{k} = mgx \tag{5.40}$$

العزم الحركي للنقطة M بالنسبة للنقطة O لدينا

شعاع الموضع و كمية الحركة



الشكل (2.5)

$\vec{L}_{P/o}$ $n(x$ $\prime v_x$

حد
$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{P} = mv_x\vec{i} + mv_y\vec{j} \end{cases} \qquad (5.41)$$

بتد فيكون العزم الحركي

$$\frac{d\vec{L}_{P/o}}{dt} = \sum \vec{M}_{\frac{P}{o}}(\vec{F}_{ex}) \qquad (5.44)$$

$$\frac{d\vec{L}_{P/o}}{dt} = \sum \vec{M}_{P/o}(\vec{p}) = \frac{d}{dt}\, m(xv_y - yv_x)\vec{k} = mgx\vec{k} \qquad (5.45)$$

$$xa_y - ya_x = gx \qquad (5.46)$$

ملاحظة: تشير $\vec{p}$ إلى الثقل بينما تشير $\vec{P}$ إلى كمية الحركة

تمرين 03:

أزيح نواس بسيط عن وضعه الشاقولي بزاوية 90 درجة ثم أطلق بدون سرعة ابتدائية. إذا علمت أن الطول يساوي l والكتلة m للنواس احسب:

1- تسارع الكتلة وتوتر الخيط بدلالة θ الزاوية التي يشكلها الخيط مع الشاقول.

2- التوتر عندما تكون مركبة السرعة الرأسية أعظمية.

الفصل السادس: العمل والطاقة

مقدمة

فيما سبق تم إستخدام قوانيين نيوتن في دراسة مبادئ التحريك للنقطة المادية. وهي علاقات شعاعية تستخدم فيها القوى بشكل رئيسي لوصف الحركة، غير أنه توجد طرق أخرى والتي تستخدم فيها علاقات سلَمية تعتمد على مفهوم الطاقة والعمل، تؤدي هذه القوانيين إلى دراسة الحركة دون معرفة القوى المسببة لها و دون التطرق لمعرفة مسار الحركة ومعادلاتها الزمنية...إلخ.

*– تعريف العمل: (عمل قوة) يعطى عمل القوة $\vec{F}$ التي تنقل النقطة المادية m بمسافة $d\vec{r}$ بما يلي:

$$dW = d\vec{r}.\vec{F} \qquad (6.01)$$

ويكون العمل الكلي من نقطة A إلى نقطة B كمايلي:

$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} \qquad (6.02)$$

ووحدته الجول ($joule$) ويرمز لها (J)

ملاحظة: عمل القوة الثابتة لا يتعلق بالمسار المتبع، أي أن العمل $W_{AB}(\vec{F}) > 0$ له نفس القيمة مهما كان المسار مستقيما أو منحني

العمل المحرك و العمل المقاوم.

- إذا كان العمل $W_{AB}(\vec{F}) > 0$ فإن العمل محرك
- إذا كان العمل $W_{AB}(\vec{F}) < 0$ فإن العمل مقاوم

1– عمل قوة الثقل

وقوة الثقل هي قوة جذب الأرض لهذا الجسم

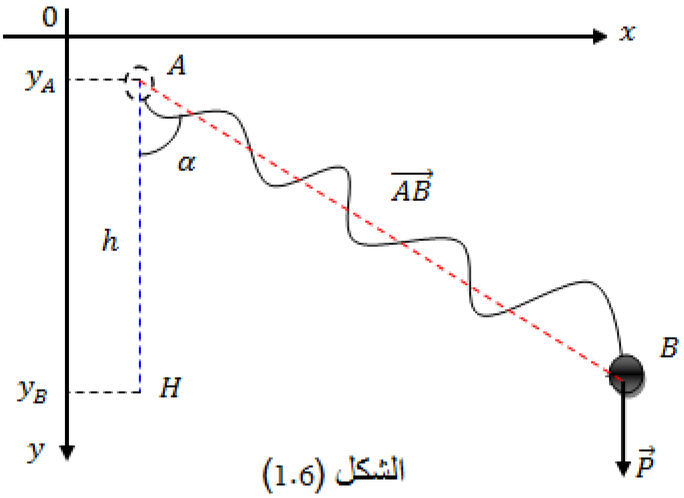
$$\vec{P} = m\vec{g} \qquad (6.03)$$

و تتجه من مركز ثقل الجسم نحو الأسفل بإتجاه الأرض عندما ينتقل جسم من النقطة A نحو النقطة B فإن:

$$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P}.\overrightarrow{AB} \qquad (6.04)$$

$$W_{AB}(\vec{P}) = P.AB.\cos\theta \qquad (6.05)$$

وحسب الشكل (1.6) المقابل المثلث ABH قائم في H يكون لدينا:



الشكل (1.6)

$$AH = AB.\cos\alpha \qquad (6.06)$$

$$AH = y_B - y_A \qquad (6.07)$$

$$AB.\cos\alpha = y_B - y_A \qquad (6.08)$$

ومنه عمل الثقل بين الموضعين A و B هو :

$$\mathrm{W_{AB}}(\vec{\mathrm{P}}) = P(y_B - y_A) \qquad (6.09)$$

أي أن :

$$\mathrm{W_{AB}}(\vec{\mathrm{P}}) = mg(y_B - y_A) \qquad (6.10)$$

$$\mathrm{W_{AB}}(\vec{\mathrm{P}}) = mgh \qquad (6.11)$$

الخلاصة:

1-عمل الثقل لا يتعلق بالمسار المتبع بل بالشاقول الموافق لنقطتي الإنطلاق والوصول.

2-في حالة نزول الجسم يسمى عمل الثقل بالمحرك $W_{\mathrm{AB}}(\vec{P}) > 0$

3-في حالة صعود الجسم يسمى عمل الثقل بالمقاوم $W_{\mathrm{AB}}(\vec{P}) < 0$

2- عمل قوة غير ثابتة.

إذا كانت القوة $\vec{F}$ غير ثابتة (متغيرة في الشدة) فإن عملها لا يكون ثابتا (أي لا يساوي $(\vec{F}.\overrightarrow{AB}$) بل يجب تقسيم المسار إلى إنتقالات عنصرية $d\vec{r}$ ونحسب العمل العنصري dw بكل مرحلة كما يلي:

$$dW = \vec{f}.d\vec{r} \qquad (6.12)$$

والعمل الكلي أثناء الإنتقال من A إلى B هو عبارة عن مجموع الأعمال العنصرية كما يلي:

$$W_{AB} = \int_{A}^{B} dW = \int_{y_A}^{y_B} \vec{F}.d\vec{r} \qquad (6.13)$$

إذا كانت $\vec{F}$ من الشكل : $\vec{F}(r) = \vec{F}(x, y, z)$

عندها يصبح الجداء كمايلي:

$$W = \int_{A}^{B} \vec{F}.d\vec{r} \qquad (6.14)$$

$$\vec{F}d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (6.15)$$

3- الاستطاعة

الاستطاعة هي العمل المنجز خلال زمن معين

انطلاقا من العلاقة

$$dW = d\vec{r}.\vec{F} \qquad (6.16)$$

$$d\vec{r} = \vec{V}.dt \rightarrow dW = Vdt.F \qquad (6.17)$$

$$\frac{dW}{dt} = V.F \qquad (6.18)$$

نعرف المقدار

$$P = \frac{dw}{dt} \quad \text{بالاستطاعة} \qquad (6.19)$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}.\vec{V} \qquad (6.20)$$

ووحدتها الواط (W) $Watt$

4- الطاقة الحركية

إن تأثير القوة $\vec{F}$ على جسم خلال وحدة الزمن dt يؤدي إلى تغير الدفع الخطي $\vec{P}$ بالمقدار $d\vec{P}$ بالشكل التالـــي:

$$d\vec{P} = \vec{F}dt = ma\,dt \qquad (6.21)$$

$$d\vec{P} = \vec{F}dt = m\frac{d\vec{V}}{dt}.dt = m\,d\vec{V} \qquad (6.22)$$

$$\vec{F}\,dt = m\,d\vec{V} \qquad (6.23)$$

ندخل $\vec{V}$ على الطرفين

$$\vec{F}.\vec{V}.dt = m.\vec{V}.d\vec{V} \qquad (6.24)$$

$$\vec{F}.d\vec{r} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \qquad (6.25)$$

ندعو المقدار $\frac{1}{2}mv^2$ بالطاقة الحركية و نرمز له بـ: E_c ومنه نحصل على:

$$dW = dE_c \qquad (6.26)$$

إذن $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ من خلال هذه العلاقة يتبين لنا أن الطاقة الحركية دالة متعلقة بسرعة المتحرك فقط، E_c متعلق بسرعتي البداية و النهاية لذى تدعى دالة الحالة (*FONCTION D'ETAT*).

هذه العبارة السابقة :

$$dW = dE_c \qquad (6.27)$$

تعبر عن الشكل التفاضلي لنظرية الطاقة الحركية إذا إنتقلت النقطة المادية من النقطة A إلى النقطة B فإن:

$$\int_A^B dE_c = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F}d\vec{r} \qquad (6.28)$$

أي أن:

$$E_{c_B} - E_{c_A} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} \qquad (6.29)$$

تدعى هذه العبارة بقانون الطاقة الحركية، ونقول التغير في الطاقة الحركية يساوي مجموع أعمال القوة المؤثرة على النقطة المادية.

4-1- بعض خصائص الطاقة الحركية

*- كل جسم في حالة حركة فإنه يملك طاقة حركية.

*- الطاقة الحركية تتناسب طردا مع كتلة الجسم.

*- الطاقة الحركية تتناسب طردا مع مربع السرعة.

4-2- نظرية الطاقة الحركية

إن أي تغير في الطاقة الحركية بين الموضعين A و B يساوي مجموع أعمال كل القوى الخارجية التي ترافقه أثناء هذا التغير و نعبر عليه بالعلاقة التالية:

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{AB}(\vec{F_i}) \qquad (6.30)$$

5- القوى المشتقة من كمون أو القوى المحافظة

يقال عن قوة بأنها محافظة أو مشتقة من كمون إذا كان عملها مستقلا عن المسار المتبع.

مثال: جسم خاضع لقوة من الشكل $\vec{F}$

$$\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{\imath} + 3xy\vec{\jmath} \tag{6.31}$$

في معلم كارتيري وفق المسارين الأول $y = 2x$ و الثاني $y = x^2$ من النقطة A(0.0) إلى النقطة B(2.4) هل هذه القوة محافظة ؟

الحل: نحسب العمل في كلا المسارين و نقارب بينهما

1− وفقا للمسار الأول

$$\vec{\mathrm{F}} = -3\mathrm{x}^2\vec{\mathrm{i}} + 6\mathrm{x}^2\vec{\mathrm{j}} \leftarrow y = 2x \tag{6.32}$$

$$dy = 2\,dx \to d\vec{r} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} = dx\vec{\imath} + 2dx\vec{\jmath} \tag{6.33}$$

$$W = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} \left(F_x dx + F_y dy\right) \tag{6.34}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{W}} = \mathrm{F_x}\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{F_y}\vec{\mathrm{j}}\ , \qquad d\vec{r} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} \tag{6.35}$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} dr = \int_{x_1}^{x_2} F_x.dx + F_y.dy \ : \ \vec{F} = -3x^2\vec{\imath} + 6x^2\vec{\jmath} \tag{6.36}$$

$$W = \int_0^2 (-3x^2)dx + (6x^2)2dx = \int_0^2 9x^2\,dx = 3(2)^3 - 3(0)^2 \tag{6.37}$$

$$W = 24j \tag{6.38}$$

لأن

2− وفق المسار الثاني

$$y = x^2 \tag{6.39}$$

$$W = \int \vec{F}\,d\vec{r} \tag{6.40}$$

$$y = x^2 \to \ \vec{F} = (x^2 - x^4)\vec{\imath} + 3x^3\vec{\jmath} \tag{6.41}$$

$$dy = 2x\,dx \to W = \int F_x\,dx + F_y\,dy \tag{6.42}$$

$$W = \int \vec{F}\,d\vec{r} = \int \left(F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath}\right)(dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath}) \tag{6.43}$$

$$W = \int \left(F_x\,dx + F_y\,dy\right) \tag{6.44}$$

$$W = \int (x^2 - x^4)dx + (3x^3)2x\,dx \tag{6.45}$$

$$W = \int_0^2 (x^2 - x^4) + 6x^4 dx = \int_0^2 (x^2 + 5x^4)dx \tag{6.46}$$

$$W = \left(2^5 + \frac{1}{3}2^3\right) - (0) \rightarrow W = 34.6\,j \tag{6.47}$$

العمل وفق المسار الأول لا يساوي العمل وفق المسار الثاني وعليه فالقوة غير مشتقة من كمون (قوة غير محافظة) ومن هنا نستنتج أن القوى الغير محافظة هي التي يكون عملها متعلق بالمسار المتبع.

6- الطاقة الكامنة: وهو الكمون المخزن والمساوي للعمل المقدم للجسم لنقله من موضعه الأول إلى موضعه الثاني. إذا كانت القوة مشتقة من كمون فإن:

$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = E_{P_A} - E_{P_B} \tag{6.48}$$

ملاحظة: تربط الطاقة الكامنة دائما بمرجع مأخوذ عند نقطة تكون فيها ($E_P=0$).

6-1- الطاقة الكامنة لبعض حقول القوى

6-1-1- جسم في حقل الجاذبية الأرضية

$$W = \int_{z_1}^{z_2} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{z_1}^{z_2} \vec{P}\,.dz\vec{k} \tag{6.49}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k} \qquad \vec{P} = mg\,\vec{k} \tag{6.50}$$

$$W = \int_{z_2}^{z_1} \left(mg\vec{k}\right)\left(dz\,\vec{k}\right) \rightarrow W = mgz(Z_1 - Z_2) \tag{6.51}$$

$$W = mg\,(z_1 - z_2) \quad z_1 = 0 \tag{6.58}$$

$$W = -mgz_2 \tag{6.53}$$

6-1-2- قوة إرجاع النابض

$$dE_p = -dW \tag{6.54}$$

انطلاقا من قوة إرجاع النابض لدينا

$$\mathrm{E_p} = -\int_0^x -Kxdx \rightarrow \quad \mathrm{E_p} = +\frac{1}{2}Kx^2 \qquad (6.55)$$

6-1-3- الحقل الكهروساكن E و الناتج عن شحنة كهربائية Q

يعطي بالعلاقة:

$$\vec{E}_{(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Q}{r^2}.\vec{e}_r \qquad (6.56)$$

وعليه فالقوة الكهربائية التي تخضع لها شحنة q موجودة داخل الحقل الكهربائي عن بعد r من Q هي من الشكل:

$$\vec{F} = q.\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q\varphi}{r^2}.\vec{e}_r \qquad (6.57)$$

إذن الطاقة الكامنة المشتقة من القوة الكهربائية تعطى:

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\varphi q}{r} \qquad E_p = q.v \qquad (6.58)$$

ملاحظة: القوى المحافظة أو التي تشتق من كمون تحقق العلاقة:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(E_p) \qquad (6.59)$$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_p) \qquad (6.60)$$

7- الطاقة الميكانيكية

إن التغير في الطاقة الحركية يساوي مجموع أعمال القوى المحافظة وغير المحافظة وعليه:

$$E_{CB} - E_{CA} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B \vec{f}^c\, d\vec{r} + \int_A^B \vec{f}^{nc}\, d\vec{r} \qquad (6.61)$$

***c**: conservative* القوي المحافضة

***nc**:non conservative* القوى غير المحافضة

أما التغير في الطاقة الكامنة يساوي مجموع أعمال القوى المحافظة بإشارة (−)

$$\mathrm{E_{C_B}} - \mathrm{E_{C_A}} = -\int_A^B \overrightarrow{\mathrm{f^c}}.d\vec{r} \qquad (6.62)$$

ومنه:

$$E_{C_B} - E_{C_A} = -[E_{P_B} - E_{P_A}] + \int_A^B \overrightarrow{f^{nc}}.d\vec{r} \quad (6.63)$$

$$\left(E_{C_B} + E_{P_B}\right) - \left(E_{C_A} + E_{P_A}\right) = \int_A^B \overrightarrow{f^{nc}}.d\vec{r} \quad (6.64)$$

نسمي المقدار $E_{M_A} = E_{T_A} = \left(E_{C_A} - E_{P_A}\right)$ بالطاقة الميكانيكية عند النقطة A

نسمي المقدار $E_{M_B} = E_{T_B} = \left(E_{C_B} - E_{P_B}\right)$ بالطاقة الميكانيكية عند النقطة B

ومنه كذلك نستنتج قانون الطاقة الميكانيكية أو الكلية والذي ينص على أن التغير في الطاقة الميكانيكية يساوي عمل القوى الغير محافظة بين النقطتين A و B ونكتب :

$$E_{T_\mathrm{B}} - \mathrm{E}_{\mathrm{T_A}} = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \overrightarrow{\mathrm{f^{nc}}}.\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} \quad (6.65)$$

وإذا كانت قوى محافظة فإن:

$$E_{T_\mathrm{B}} - \mathrm{E}_{\mathrm{T_A}} = 0 \quad (6.66)$$

$$\Delta E_T = 0 \quad (6.67)$$

تمرين 01:

تتحرك كرة نقطية m=100g على محور أفقي دون احتكاك تقلع من السكون في الزمن t=0s وتبلغ سرعة قدرها 5m/s. في اللحظة t=2s.

1− ماهي عبارة الطاقة الحركية.

2− احسب الطاقة الحركية. أ− في الزمن t=0s **ب**− في الزمن t=2s

3− استنتج تغير الطاقة الحركية بين t=0s و t=2s.

الحل:

عبارة الطاقة الحركية

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = 1.25J \quad (6.68)$$

$$E_C(t=0s)=\frac{1}{2}mv^2=0J \qquad (6.69)$$

$$E_C(t=2s)=\frac{1}{2}mv^2=1.25J \qquad (6.70)$$

$$\Delta E_C=1.25J \qquad (6.71)$$

تمرين 02:

يصعد جسم كتلته $m=2kg$ على مستو مائل ميله $\%30$ بسرعة ابتدائية شدتها $v=2m/s$ يتوقف الجسم بعد $0.5m$ ويستأنف حركته النزولية حتى نقطة الانطلاق M.

1- ماهو تغير الطاقة الميكانيكية في مرحلة الصعود؟ ماذا تستنتج؟

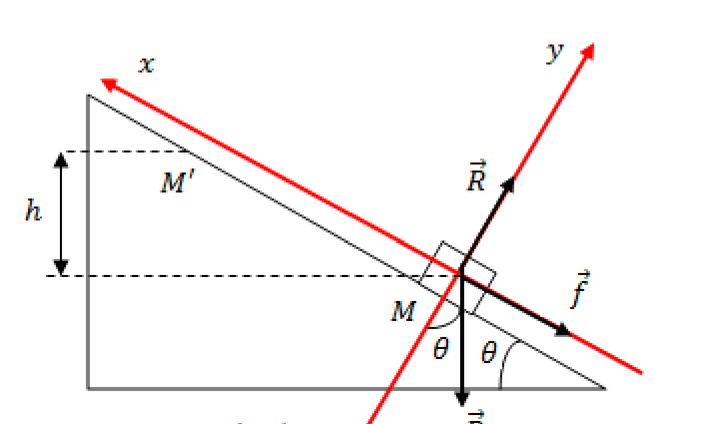
2- احسب شدة القوة المقاومة التي تعيق حركة الجسم

3- ماهي سرعة الجسم عندما يرجع إلى النقطة M

تفرض أن القوة المعيقة تحفظ شدتها وتغير فقط اتجاهها. نأخذ $g=10m/s^2$

الحل:

ملاحظة: أولا نسمي موضع النقطة M بالوضع (1) و نسمي موضع النقطة M' بالموضع (2). كما نأخذ موضع النقطة (1) مرجعا للطاقة الكامنة أي أن $E_P(1)=0$.



الشكل (2.6)

حساب التغير في الطاقة الميكانيكية

$$\Delta E=E_M(2)-E_M(1) \qquad (6.72)$$

$$\Delta E=E_C(2)+E_P(2)-E_C(1)-E_P(1) \qquad (6.73)$$

$$\Delta E=0+mgh-\frac{1}{2}mv^2-0 \qquad (6.74)$$

حساب الارتفاع h أنظر الشكل (2.6)

$$sin\theta = h/(MM') \rightarrow h = (0.5).(0.3) = 0.15m \quad (6.75)$$

تطبيق عددي:

$$\Delta E = (2).(10).(0.15) - \frac{1}{2}(2)(2)^2 = -1J \quad (6.76)$$

إذن هناك انخفاض أو فقدان في الطاقة الميكانيكية مما يدل على أن هناك عمل مقاوم (قوة معيقة).

حساب القوة المعيقة.

$$\Delta E = \sum W(\vec{F}^{nc}) \quad (6.77)$$

ملاحظة: الفرق في الطاقة الميكانيكية يساوي جميع أعمال القوى ماعدا قوة الثقل.

$$\Delta E = W(\vec{f}) + w(\vec{R}) + \cancel{w(\vec{p})} \quad (6.78)$$

$$\Delta E = W(\vec{f}) + 0 + 0 \quad (6.79)$$

$$\Delta E = -f.(MM') \quad (6.80)$$

$$-1 = -f.(0.5) \rightarrow f = 2\ N \quad (6.81)$$

حساب السرعة في الموضع M حالة الرجوع

نستخدم نظرية الطاقة الميكانيكية كما سبق وبطريقة عكسية (نزولا):

$$\mathrm{\Delta E = E_M(1) - E_M(2)} \quad (6.82)$$

$$\mathrm{\Delta E = E_C(1) + E_P(1) - E_C(2) - E_P(2)} \quad (6.83)$$

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2}mv_M^2 + 0\right) - (mgh + 0) \quad (6.84)$$

$$\left(\frac{1}{2}mv_M^2\right) - mgh = -f.(MM') \quad (6.85)$$

$$v_M^2 - 3 = -1 \rightarrow v = 1.41m/s \quad (6.86)$$

تمرين 03:

تنطلق نقطة مادية كتلتها $m=0.2kg$ من النقطة M وتتحرك على القطع التالية:

MA مستو مائل طوله $1.6m$

AB مستو أفقي

BC نصف دائرة نصف قطرها $0.40m$

الموضعان M و C لهما نفس الارتفاع ونفرض أن الطاقة الميكانيكية محفوظة أثناء الحركة. نأخذ . $g=10m/s^2$
انظر الشكل (3.6)، احسب:

1- السرعة الابتدائية للنقطة المادية علما بأنها تصل إلى الموضع C بسرعة تقدر بـ : 3m/s

2- زاوية الميل α

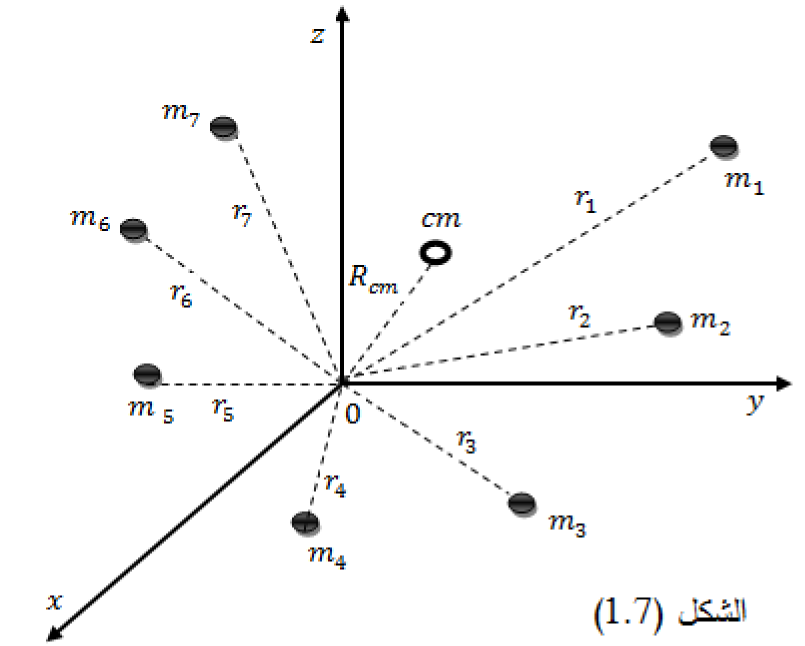
3- الطاقة الميكانيكية في الموضع C إذا كان $h=0$ في المستوي الأفقي AB

الشكل (3.6)

الفصل السابع: مركز الكتل

مقدمة

كما هو الحال بالنسبة للأجسام الصلبة، أو أي منظومة مؤلفة من n جسيم، يلزمنا لتحديد مواضعها في الفضاء، ثلاث إحداثيات مما يعني انه يتوجب علينا حل $3n$ معادلة مرتبطة ببعضها. لذلك تقتصر دراستنا هذه على الجسيمات الخاضعة لقوى خارجية ما، بتحديد النقطة التي تؤثر عندها محصلة هذه القوى، ثم نحاول دراسة حركة أجزاء المنظومة بالنسبة لهذه النقطة، والتي نطلق عليها مركز الكتلة أو مركز الثقل الجسم. لأجل ذلك نعتبر كتلة M مكونة من عدد من نقاط مادية n ، في حالة حركة تحت تأثير القوى الداخلية والخارجية لهذا الوسط، بالنسبة لمعلم عطالي R أنظر الشكل (1.7). نقيَد في كل لحظة، الحالة الميكانيكية للجملة M بمجموع n شعاع، موضع كل منها $\vec{r}_i$ وبسرعة كل منها $\vec{v}_i$ و بكمية حركة $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$.



الشكل (1.7)

إن مركز الكتلة M لعدة جسيمات نقطية، m_1, m_2, m_3 ... موجودة في المواضع، r_1 ، r_2 ، r_3 ...

يعطى بالعلاقة:

$$R_{CM} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + ..} \tag{7.01}$$

حيث يعرّف مركز الكتل c لجملة جسيمات بشعاع الموضع $\overrightarrow{oc}$

$$\vec{R}_{CM} = \overrightarrow{oc} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M} \qquad (7.02)$$

M: هي الكتلة الكلية للجملة.

$$\vec{r}_i = \overrightarrow{OM_i} \qquad (7.03)$$

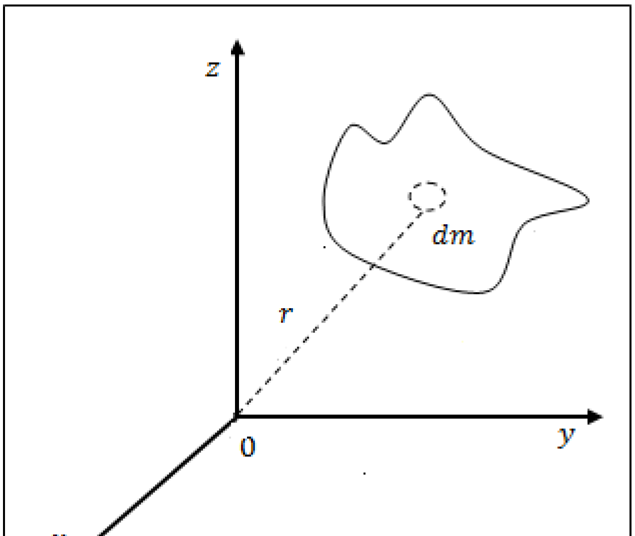
في حالة التوزيع المستمر

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm} \qquad (7.04)$$

تنويه: عادة مركز كتل الجملة C يدعى مركز ثقل الجملة G.

يمكن تجزئة الجسم الصلب المستمر إلى عدد كبير لا متناهي الصغر من النقاط المادية، بحيث يمكن اعتبار كل نقطة مادية dm حجمها dv بحيث يمكن تحديده بموضع r. الشكل (2.7). عندها يصير مركز الكتلة يعطى بالعلاقة :

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm \qquad (7.05)$$



الشكل (2.7)

و بتعريف الكثافة الحجمية.

$$\rho(r) = \frac{dm}{dV} \qquad (7.06)$$

تصير العلاقة الأخير

$$R = \frac{1}{M} \int r\rho\, dV \qquad (7.07)$$

V: هو حجم الجسم الصلب

كما يمكن الحصول على مركبات متجه موضع مركز الكتلة لكل محور، وذلك:

$$X = \frac{1}{M}\int x\rho\, dV \qquad (7.08)$$

$$Y = \frac{1}{M}\int y\rho\, dV \qquad (7.09)$$

$$Z = \frac{1}{M}\int z\rho\, dV \qquad (7.10)$$

و إذا كان الجسم الصلب مستويا، يعني له كثافة سطحية، حسب المعادلة (7.11)

$$\sigma = \frac{dm}{ds} \qquad (7.11)$$

فإن العلاقة السابقة (7.07) يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$R = \frac{1}{M}\int r\sigma\, dS \qquad (7.12)$$

و بنفس الطريقة إذا الجسم الصلب له توزيعا خطيا، أي عبارة عن سلك كثافته الخطية

$$\lambda = \frac{dm}{dl} \qquad (7.13)$$

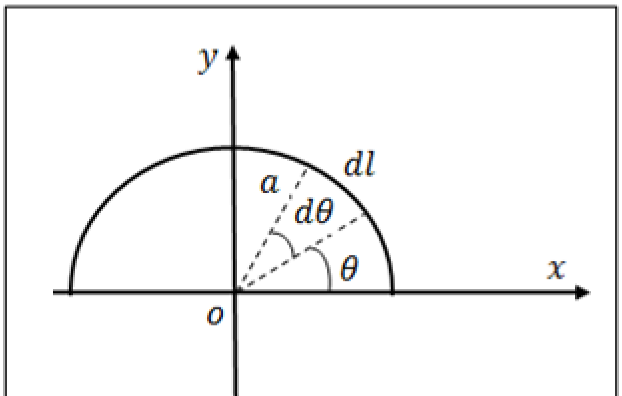
فإن:

$$R = \frac{1}{M}\int r\lambda\, dl \qquad (7.14)$$

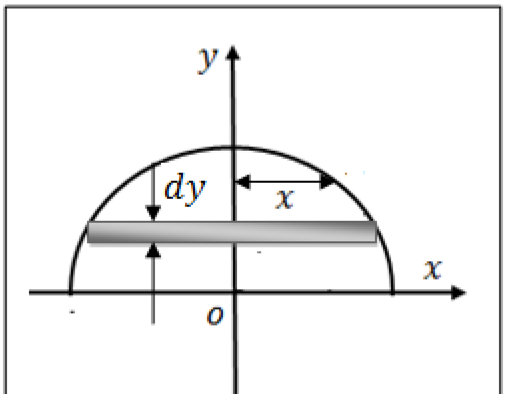
مثال:

نأخذ سلك على شكل نصف دائرة نصف قطرها a، عين مركز كتلته (مركز ثقله).

نأخذ طولا عنصريا dl، و نحقق المعادلتين (7.08) و (7.09) كما في الشكل (3.7)



الشكل (3.7)



الشكل (4.7)

$$X = \frac{1}{M}\int x\sigma\, ds \qquad (7.15)$$

$$Y = \frac{1}{M}\int y\sigma\, ds \qquad (7.16)$$

حيث يعطى السطح العنصري بالعلاقة انظر الشكل (4.7)

$$ds = 2xdy \qquad (7.17)$$

كما أن معادلة الدائرة:

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad 7.18)$$

ومنه:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \rightarrow dy = -\frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad (7.19)$$

أي أن:

$$X = \frac{1}{M}\int_a^0 \sigma(x)\, 2x(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}})dx = 0 \qquad (7.20)$$

أما المركبة الثانية فهي:

$$Y = \frac{1}{M}\int_a^0 \sigma(\sqrt{a^2 - x^2})2x(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}})dx = \frac{2\sigma a^3}{3M} \qquad (7.21)$$

واعتبار أن كتلة نصف القرص هي :

$$M = (\frac{1}{2}\pi a^2)\sigma \qquad (7.22)$$

وفي الأخير

$$Y = \frac{4a}{3\pi} \qquad (7.23)$$

يقع مركز الكتلة على OY بسبب التناظر.

1- الدفع الخطي الكلي للجملة:

كما رأينا سابقا حسب المعادلة (5.04) من الفصل الرابع يمكن كتابة الدفع الخطي بما يلي :

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\overrightarrow{dr_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM_i}) \qquad (7.24)$$

$$\vec{P} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overrightarrow{OM_i}\right) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{R}_{CM}\right) = (\sum_{i=1}^{n} m_i)\frac{d}{dt}\left(\vec{R}_{CM}\right) \qquad (7.25)$$

و الحد $\frac{d}{dt}(\vec{R}_{CM})$ هو سرعة مركز الكتل بالنسبة إلى المعلم الثابت R و نكتب:

$$\vec{V}_C = \frac{d}{dt}(\vec{R}_{CM}) \qquad (7.26)$$

ومنه عبارة الدفع الخطي الكلي هي:

$$\vec{P} = M\vec{V}_C \qquad (7.27)$$

الدفع الخطي الكلي للجملة هو جداء الكتلة الكلية للجملة في شعاع السرعة لمركز الكتل بالنسبة للمعلم R.

2- الدفع الزاوي للجملة بالنسبة لنقطة

لنفترض أن لدينا جملة من الجسيمات $\sum_{i=1}^{n} m_i$ تشغل الموضع $\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i$ سرعتها في المعلم العطالي $\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i$ إن الدفع الزاوي لها هو مجموع الدفع الزاوي لكل الجسيمات.

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 \ldots \vec{l}_i + \cdots \vec{l}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i \qquad (7.28)$$

و منه يمكن أن نستخلص:

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2 + \cdots \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i + \cdots \vec{r}_n \times m_n\vec{v}_n \qquad (7.29)$$

ومن جهة أخرى لدينا

$$\vec{r}_i = \vec{R}_C + \vec{r}_i' \qquad (7.30)$$

$$\vec{v}_i = \vec{V}_C + \vec{v}_i' \qquad (7.31)$$

حيث أن:

$\vec{v}_i$: السرعة بالنسبة للمعلم العطالي.

$\vec{v}_i'$: السرعة بالنسبة لمعلم مركز الكتل.

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{R}_C + \vec{r}_i') \times m_i(\vec{V}_C + \vec{v}_i') \qquad (7.32)$$

و بعد توزيع العلاقة:

$$\vec{L} = \vec{R}_C \times \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{V}_C + \vec{R}_C \times \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i' + \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i' \times \vec{V}_C + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i' \times m_i\vec{v}_i' \qquad (7.33)$$

وبما أن سرعة معلم مركز الكتل معدومة، إذن مجموع الدفع الخطي لكل جسيمات الجملة يكون معدوما.

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i' = \vec{0} \qquad (7.34)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = M \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i' = \vec{0} \qquad (7.35)$$

فنحصل على:

$$\vec{L} = \vec{R}_C \times M\vec{V}_C + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' \qquad (7.36)$$

نضع :

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' \qquad (7.37)$$

تسمى هذه العلاقة الأخيرة بالدفع الزاوي الذاتي:

$$\vec{L} = \vec{R}_C \times M\vec{V}_C + \vec{\tau} \qquad (7.38)$$

3- الطاقة الحركية لجملة جسيمات

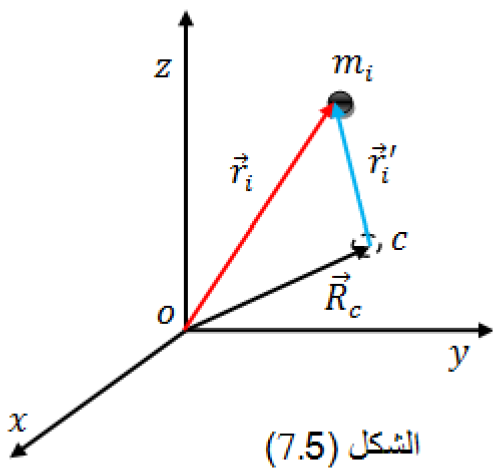
من المعلوم أن الطاقة الحركية لمجموعة من الجسيمات تكتب بالشكل:

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (v_i . v_i) \qquad (7.39)$$

فإذا حددنا موضع الجسيم m_i بالنسبة إلى المعلم العطالي (مراقب ثابت) $\vec{r}_i$ ، وبالنسبة إلى مركز الكتل بالمتجه $\vec{r}_i'$ ، كما نحدد مركز الكتل بالنسبة إلى المعلم الثابت $\vec{R}_C$، انظر الشكل (7.5) فإن:

$$\vec{r}_i = \vec{R}_C + \vec{r}_i' \qquad (7.40)$$

و باشتقاق هذه الأخيرة نحصل على



الشكل (7.5)

$$\vec{v}_i = \vec{V}_C + \vec{v}'_i \tag{7.41}$$

نذكر بأن :

$\vec{v}_i$: سرعة الجسيم بالنسبة للمعلم العطالي.

$\vec{v}'_i$: سرعة الجسيم بالنسبة لمعلم مركز الكتل.

$\vec{V}_C$: سرعة مركز الكتل.

و تصبح العلاقة (7.39) كما يلي:

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (V_c + v'_i)(V_c + v'_i) \tag{7.42}$$

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i {V_c}^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \, {v'_i}^2 + V_c \sum_{i=1}^{n} m_i \, v'_i \tag{7.43}$$

وكما سبق وان أشرنا في المعادلة (7.34) فإن الحد الأخير يكون معدوما.

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = M \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}'_i = \vec{0} \tag{7.44}$$

و منه فإن:

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i {V_c}^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \, {v'_i}^2 \tag{7.45}$$

$$E_c = \frac{1}{2} M {V_c}^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \, {v'_i}^2 \tag{7.46}$$

إذن فالطاقة الحركية لمنظومة الجسيمات هي مجموع الطاقة الحركية للحركة الانتقالية لمركز الكتلة، بالإضافة إلى مجموع الطاقة الحركية لكل الجسيمات بالنسبة إلى مركز الكتل.

تمرين 01:

احسب مركز كتل سلك منحني على شكل نصف دائرة قطرها a، انظر الشكل (6.7). نفس الشيء بالنسبة لـ نصف قرص متجانس نصف قطره a.

الحل:

ملاحظة: نستخدم نظرية بابس الأولى والثانية التي لم يسبق الإشارة إليها في الدرس والتي تنص على أن:

المساحة الناتجة عن دوران منحني مستوي حول محور دوران لا يتقاطع معه تساوي طول المنحني مضروبا في المسافة التي يقطعها مركز ثقل (كتل) خلال الدوران. أما النظرية الثانية فالحجم الناتج عن دوران قطعة مستوية لا

يتقاطع معها إلا عند طرفيها، تساوي مساحة القطعة مضروبة في المسافة التي يقطعها مركز الكتل خلال مرحلة الدوران. وعليه حسب الحالة الأولى فإن:

مساحة المنحني الدائري هي $4\pi a^2$ و طول المنحي هو الأخر πa

أما المسافة التي يقطعها مركز الكتل خلال مرحلة الدوران فهي $2\pi Y$ حيث Y هو مركز الكتل للجملة، أنظر الشكل (6.7) ومنه:

$$4\pi a^2 = (\pi a).(2\pi Y) \tag{7.47}$$

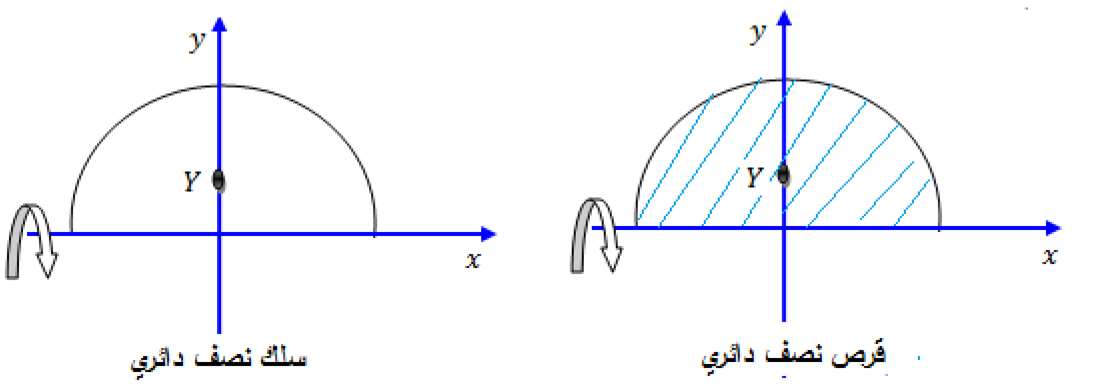
$$Y = \frac{2a}{\pi} \tag{7.48}$$

نفس الشيء بالنسبة لنصف القرص

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3 \tag{7.49}$$

$$\frac{4}{3}\pi a^3 = \left(\frac{1}{2}\pi a^2\right).(2\pi Y) \tag{7.50}$$

$$Y = \frac{4a}{3\pi} \tag{7.51}$$



الشكل (6.7)

تمرين 02:

جد مركز الكتل لجملة جسيمات $m_1 = 1kg$, $m_2 = 2kg$, $m_2 = 3kg$ التي تقع على رؤوس مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه $l = 1m$

الفصل الثامن: التصادم

يعرّف التصادم بين جسمين على أنه ذلك التأثير المتبادل بينهما لكميات فيزيائية (كالدفع والطاقة)، ويعتبر من المسائل الفيزيائية ذات الأهمية البالغة لما ينتج عن ذلك من معلومات عن الأجسام المتصادمة وطبيعة التصادم، كتجانس درجة الحرارة و بنية الجزيئات و الذرات و النوى و حركة جزيئات الغاز وهناك نوعان من التصادمات:

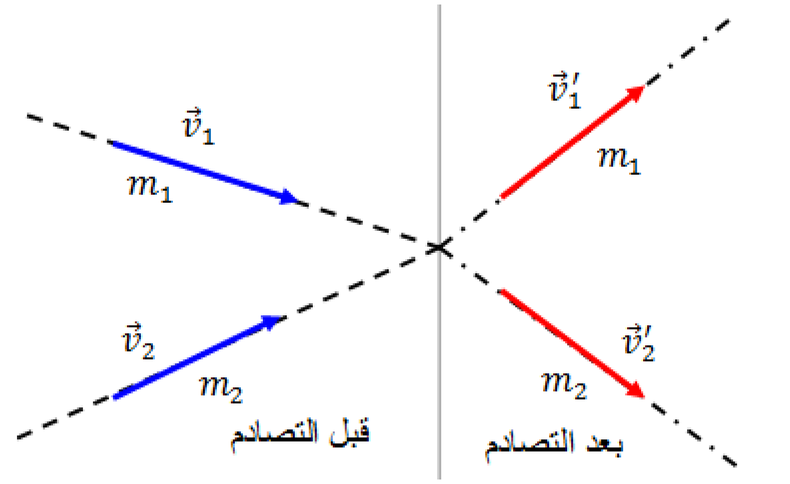
أ- **التصادمات المرنة:** وهي التي تبقى فيها الطاقة الكلية للجسيمات المتصادمة قبل و بعد التصادم محفوظة.

ب- **التصادمات غير المرنة:** وهي التي تكون فيها الطاقة الكلية غير محفوظة قبل وبعد التصادمات.

ملاحظة: تصادم الجسيمين لا يعني تلامسهما وإنما تبادلهما لمقادير فيزيائية.

1- التصادمات المرنة

في معلم عطالي، نعتبر جسيمتين ماديتين مستقلين الواحدة عن الأخرى، كتلتاهما m_1 و m_2 على التوالي، معزولة أو شبه معزولة ميكانيكيا، و سرعتاهما $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ على التوالي، انظر الشكل (1.8). بعد التصادم و لمدة قصيرة جدا، تصبح الجملة معزولة أو شبه معزولة ميكانيكيا، ولكن مقادير فيزيائية جديدة $\overrightarrow{v'}_1$ و $\overrightarrow{v'}_2$.



الشكل (1.8)

1-1- انحفاظ شعاع الدفع أو كمية الحركة

بما أن الجملة m_1 و m_2 معزولة ينتج عن ذلك انحفاظ كمية الحركة أو شعاع الدفع الخطي للجملة، أي أن كمية الحركة قبل التصادم تساوي كمية الحركة بعد التصادم.

$$\vec{p}(\text{قبل}) = \vec{p}\left(\text{بعد}\right) \ \rightarrow \ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \qquad (8.01)$$

أي أن:

$$\vec{m}_1\vec{v}_1 + \vec{m}_2\vec{v}_2 = \vec{m}_1\vec{v}_1' + \vec{m}_2\vec{v}_2' \qquad (8.02)$$

1-2- انحفاظ الطاقة الحركية

نعلم أن الطاقة الميكانيكية هي مجموع الطاقة الكامنة والطاقة الحركية، **و**كل جسيمة قد تملك طاقة كامنة، هذه الطاقة لا تتعلق إلا بالموضع الذي يحتله الجسيم المعتبر، وبما أن التصادم يتم في لحظة وجيزة فان الجسيم لا يتغير موضعه، و بالتالي الطاقة الكامنة لا تتغير. إذ أن تغير الطاقة الميكانيكية يعود في هذه الحالة إلى تغير في الطاقة الحركية فقط.

$$E_c(\text{قبل}) = E_c\left(\text{بعد}\right) \rightarrow \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2 = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1' + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2' \qquad (8.03)$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \qquad (8.04)$$

1-3- انحفاظ الدفع الزاوي

هذا القانون ينص على أن الدفع الزاوي قبل التصادم وبعده لجملة معزولة محفوظ وعليه:

$$\vec{L} = \vec{L}' \qquad (8.05)$$

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_1' + \vec{L}_2' \qquad (8.06)$$

2- التصادمات غير المرنة(اللين)

تنقسم التصادمات غير المرنة إلى قسمين:

*- التصادمات غير المرنة كليا يتغير فيها عدد الأجسام المتصادمة نتيجة التصادم كأن تلتصق الجسيمات المتصادمة ببعضها وتصير جسما واحدا، أو ينشطر جسم إلى جسمين أو أكثر.

*- التصادمات غير المرنة جزئيا تبقى فيها الجسيمات المتصادمة منفصلة عن بعضها و إن اختلفت كتلها نتيجة التصادم. وفي كلا الحالتين من التصادمات غير المرنة يكون هناك ضياع في الطاقة الحركية على شكل حرارة مما ينتج عنه عدم حفظ المقادير الفيزيائية.

$$E_{C1} + E_{C2} - (E_{C1}' + E_{C2}') = Q \qquad (8.07)$$

حيث Q هي الفرق في الطاقة الكلية للأجسام قبل وبعد التصادم.

إذا كانت $Q > 0$ فإن بعض الطاقة تتحرر نتيجة التصادم، وإذا كان $Q < 0$ فإن التصادم ماص للطاقة.

تمرين 01:

يصطدم بروتون كتلته m و سرعته v_0 بنواة ذرة الهيليوم ساكنة كتلتها $4m$ فيتشتت بزاوية 45 درجة عن مساره الأصلي. ما سرعة كل جسيم بعد التصادم إذا كانت الطاقة الضائعة Q تساوي ربع طاقة البروتون الابتدائية ؟

الحل:

نكتب أولا مبدأ حفظ الدفع الخطي

$$mv_{0P} + 0 = m_P v_P + m_\alpha v_\alpha \qquad (8.08)$$

و حيث أن $m_\alpha = 4m_P$ والبروتون يتشتت بزاوية 45 عن مساره الأصلي، انظر الشكل (2.8)

$$v_0 = v_p' \cos(45) + 4v_\alpha' \cos(\beta) \qquad (8.09)$$

$$0 = v_p' sin(45) + 4v_\alpha' \sin(\beta) \qquad (8.10)$$

أما قانون حفظ الطاقة، حيث الحد الأخير يعبر عن الطاقة الضائعة.

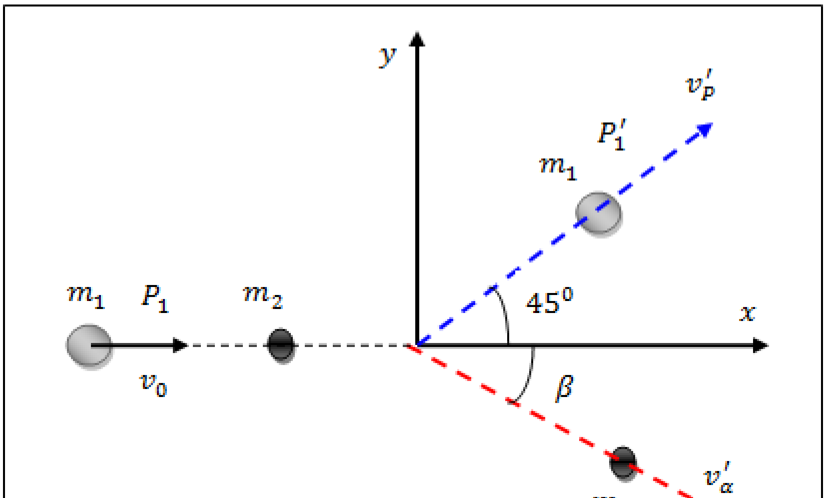
$$\frac{1}{2}m_p v_0^2 = \frac{1}{2}m_p v_p'^2 + \frac{1}{2}(4m_\alpha)v_\alpha'^2 + \frac{1}{4}(\frac{1}{2}m_p v_0^2) \qquad (8.11)$$

$$16v_\alpha'^2 = 3v_0^2 - 4v_p'^2 \qquad (8.12)$$

وبحل المعادلات الثلاثة (8.09)، (8.10)، (8.12) وبأخذ الجذر الموجب فقط نجد أن:

$$v_p' = 0.79\, v_0 \qquad v_\alpha' = 0.18\, v_0$$

كما انه يمكننا استنتاج زاوية التشتت للكتلة الثانية من خلال المعادلات السابقة.



الشكل (2.8)

$$tan(\beta) = \frac{v_p'}{\sqrt{(2v_0 - v_p'}} = 1.26 \rightarrow \beta = 51.2^0 \qquad (8.13)$$

تمرين02:

يسير متزلج كتلته $m_1 = 75kg$ ، وبسرعة $\vec{v}_1 = 5m/s$ ، فيصطدم مع متزلج أخر كتلة $m_2 = 50kg$ ، وبسرعة $\vec{v}_2 = 5m/s$. اصطداما رأسيا بزاوية قائمة بينهما انظر، الشكل (3.8) . يظل المتزلجان معلقان على بعضهما البعض بعد التصادم الذي يمنحهما حركة مستقيمة. احسب السرعة المشتركة بعد التصادم، يمكن اعتبار احتكاك الزلاجات على الجليد ضئيلًا.

الحل:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v} \tag{8.14}$$

وحسب الشكل فأن الإسقاط يكون:

$$m_1\vec{v}_{1x} + m_2\vec{v}_{2x} = (m_1 + m_2)\vec{v}_x = (m_1 + m_2)\vec{v}cos(\alpha) \tag{8.15}$$

$$m_1\vec{v}_{1y} + m_2\vec{v}_{2y} = (m_1 + m_2)\vec{v}_y = (m_1 + m_2)\vec{v}sin(\alpha) \tag{8.16}$$

تطبيق عددي:

$$75 \times 5 + 0 = 125\ v\ \cos(\alpha) \tag{8.17}$$

$$0 + 50 \times 10 = 125\ v\ sin(\alpha) \tag{8.18}$$

يمكن حساب الزاوية بالعلاقة:

$$tan(\alpha) = 1.33\ \rightarrow\ \alpha =\ 53.13^0 \tag{8.19}$$

إذن السرعة المشتركة تستخرج من إحدى المعادلتين السابقتين (8.17) و(8.18) :

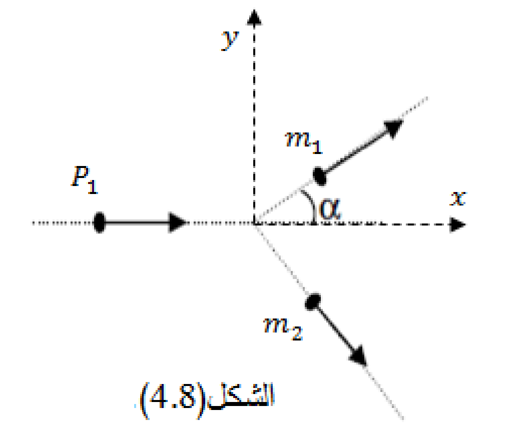
$$v = \frac{500}{125.sin(\alpha)}\ 5m/s \tag{8.20}$$

كما يمكن حساب الطاقات الحركية قبل وبعد الاصطدام:

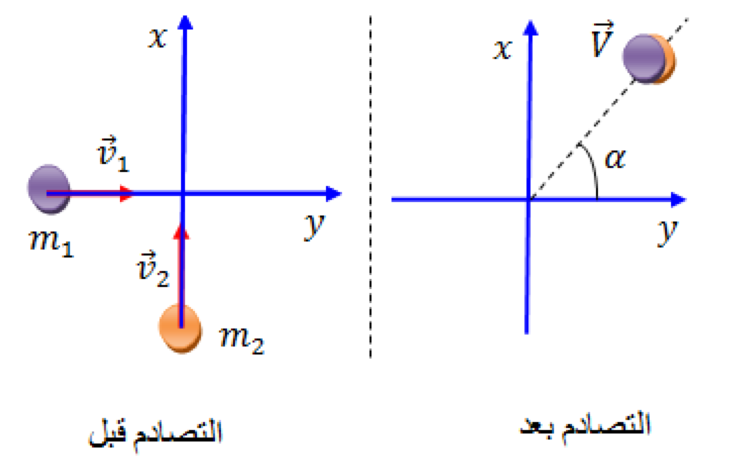
$$E_C = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = 3437.5J \tag{8.21}$$

$$E'_C = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = 1562.5J \tag{8.22}$$

إذن تم تحويل جزءا أقلَ من نصف الطاقة الحركية الأولية إلى أشكال أخرى من الطاقة.



الشكل(4.8)



الشكل (3.8)

تمرين03:

اصدم بروتون ببروتونا آخر كان ساكنا، فخرج أحدهما بزاوية قدرها 30° بالنسبة لاتجاه ورود البروتون انظر الشكل(4.8). ماهي سرعة كل منهما بعد التصادم وزاوية انحراف الثاني؟

المراجــــع

*– إبراهيم سعد الله، الفيزياء الأساسية للجامعة الميكانيك. ديوان المطبوعات الجامعية (2017).

*– بومعزة ليلى، محاضرات في الفيزياء1، ميكانيك النقطة المادية، مطبوعة دروس جامعة قسنطينة1 (2018).

*– شهرة ثورية، محاضرات في الفيزياء1، ميكانيك النقطة المادية، مطبوعة دروس جامعة ورقلة (2012).

*– لمين حمدلو، ميكانيك النقطة المادية، مطبوعة دروس جامعة قسنطينة1.

*– عز الدين بقاص، فيزياء،1 ميكانيك النقطة، مطبوعة دروس جامعة الوادي (2019).

*– محمد قيصرون ميرزا، مدخل إلى الميكانيك التقليدي، جامعة البحرين (1999).

*– احمد فزازي، دروس في ميكانيك النقطة المادية، الطبعة الثانية، جامعة بشار (2009).

*– نصر الدين مولاي و ع. بودهان، مدخل إلى الميكانيك، المدرسة العليا للأساتذة القبة.

*- Michel Henry et Nicolas Delorme, Mini manuel mécanique du point cours (2008).

*- Vincent Demery. Physique, Résumé du cours en fiches (2010).

*- L. Benallegue, M. Debiane, A. Gourari, A. Mahmdia, mécanique du point matériel (2011).