2021/02/18

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة - بوسعادة
المجاهد الفريق أحمد قايد صالح
قسم: العلوم الدقيقة

Ecole Normale Supérieure
Bou-Saada
Dép. Sciences Exactes

دروس في فيزياء

ميكانيك الكم -1-

المقياس: ميكانيك الكم

المستوى: الثالثة فيزياء

الاستاذ: بن عامر علي

الرتبة: استاذ محاضر قسم - ب- بالمدرسة العليا للأساتذة - بوسعادة-

السنة الجامعية : 2019/2020

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة - بوسعادة
المجاهد الفريق أحمد قايد صالح
قسم: العلوم الدقيقة

Ecole Normale Supérieure
Bou-Saada
Dép. Sciences Exactes

دروس في فيــزياء

ميـــكانيـــك الكـــم -1-

المقياس: ميـكانيـك الكـم

المستوى: الثالـثة فـيـــزياء

الاستاذ: بن عـــامرعــلي

الرتبة: استاذ محاضر قسم - ب- بالمدرسة العليا للأساتذة - بوسعادة-

السنة الجامعية : 2019/2020

الفهرس

مقــــدمة

كانت الظواهر العلمية وحتى نهاية القرن الثامن عشر الميلادي يمكن شرحها شرحا وافيا باستخدام قوانين نيوتن للحركة والقوانين الفيزيائية ، التي نذكر منها ما تمثل في ميكانيك نيوتن الذي طُور بواسطة العالمان لاجرانج وهاملتون حيث تم استخدام هذه النظرية لوصف حركة الكواكب و القذائف وكذلك فهم كثير من الظواهر المعقدة مثل نظرية المرونة وديناميك الموائع ، و إنجازات العالم جول وبيان ، في تكافُؤ الشغل والحرارة ، والتي أدت لفهم الإنتروبي والقانون الثاني للديناميك الحرارية ، و أبحاث كارنوت التي ادت الى فهم الانتروبي ، و االقانون الثاني للديناميك الحرارية ، وما تبعَ هذه الأبحاث من تطوير على يد العالم جبس في إرساء أسس علم الديناميك الحرارية. كما شهدت مجالات أخرى من الفيزياء مثل الضوء والنظرية الكهرومغناطيسية إنجازات ملحوظة متمثلة في الاستنتاجات الهامة التي توصل إليها العالم ماكسويل بمعادلاته الشهيرة والتي و حدت مجالات الضوء والكهرومغناطيسية وما يتبع هذه الأبحاث من التجارب العلمية المعمقة بواسطة الكثير من علماء الفيزياء. كل هذه الإنجازات في المجالات المختلفة للفيزياء كونت ما يسمى الآن ما يعرف بالفيزياء التقليدية (الكلاسيكية). ونظرًا لأن الفيزياء الكلاسيكية غير كافية تمامًا لوصف الظواهر التي لوحظت على المستوى الذري و ما دون ذلك كإشعاع الجسم الاسود و ظاهرة الفعل الكهروضوئي ، فمن الضروري تطوير إطار مفاهيمي جديد للفيزياء الحديثة. هذه النظرية الجديدة تسمى تقليديًا "ميكانيكا الكم". و هي نتاج جهد مضن بشكل أساسي من قبل العلماء اذكر منهم شرودنغر ، بلانك ، هايزنبرغ ، ديراك ما بين عامي 1924 و 1930.

إذن تمثل الفيزياء الكمومية (الكم) إحدى الدعائم الرئيسية التي تقوم عليها الفيزياء الحديثة ، فهي تنبني على أفكار ومفاهيم متقدمة ، يمكن على أساسها تفسير مختلف الظواهر الفيزيائية المجهرية بدقة ، والمقصود بالمجهرية تلك الظواهر الذرية والنووية والجزيئية وغيرها. إن القوانين الكلاسيكية قوانين ظاهرية تنطوي على دراسة الاشياء المرئية ليس بمقدورها تفسير الظواهر التي تأخذ أبعاد مجهرية مقدارها في حدود (10^{-10}m) لذلك لا تعطي هذه القوانين تفسيرا مقنعا لبعض الظواهر كـ:

1- استقرار الذرات.

2- إشعاع الجسم الاسود.

3- الفعل الكهروضوئي.

4- ظاهرة كومبتن compton.

1-استقرار الذرات:

فبالنسبة لإستقرار الذرة يرى الجانب الكلاسيكي ان الالكترون في الذرة يدور حول النواة بحركة مستمرة ، وطبقا للنظرية الكهرومغناطيسية الكلاسيكية ، ان اي شحنة كهربائية متحركه بسرعة مستمرة تبعث اشعاعا كهرومغناطيسيا ولذلك يجب ان يفقد الالكترون الدائر حول النواه داخل الذرة جزءا من طاقته اي انه يخسر و بصورة مستمرة طاقته كاملة وبالتالي فيجب ان ينتهي بحركة حلزونيه ساقطا على النواة.

اما الجانب الكوانتي (نموذج بور النصف كموميBohr) يستطيع الالكترون ان يدور في مدارات متميزه ومستقره بطاقة تعطى بلاعلاقة التالية.

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} eV$$

كما يستطيع الالكترون ان ينتقل من مدار الى اخر اذا حصل تغير في الطاقةΔE بسبب امتصاص او انبعاث في الاشعاع بحيث تعطى طاقة الفوتون المنبعث او الممتص بالشكل التالي

$$\Delta E = h\upsilon$$

ثابت بلانك $h == 6.626 \times 10^{-34} J.s = 4.136 \times 10^{-15} \mathrm{eV}.s$

υ : تردد الاشعاع.

2- إشعاع الجسم الاسود:

من و جهة نظرالفيزياء التقليدية ان شدة الإشعاع الجسم الاسود تزداد بنقصان الطول الموجي (أي بزيادة التردد) و هذا مخالف لواقع التجارب العملية لبلانك الذي وجد ان الجسم الاسود يمتص كل الإشعاعات ذات الأطوال الموجية المختلفة الساقطة عليه و يعيد إشعاعها بصورة مثاليه ، و رسم العلاقة بين شدة الإشعاع و الطول الموجي لكل إشعاع حيث توصل الى مايلي :

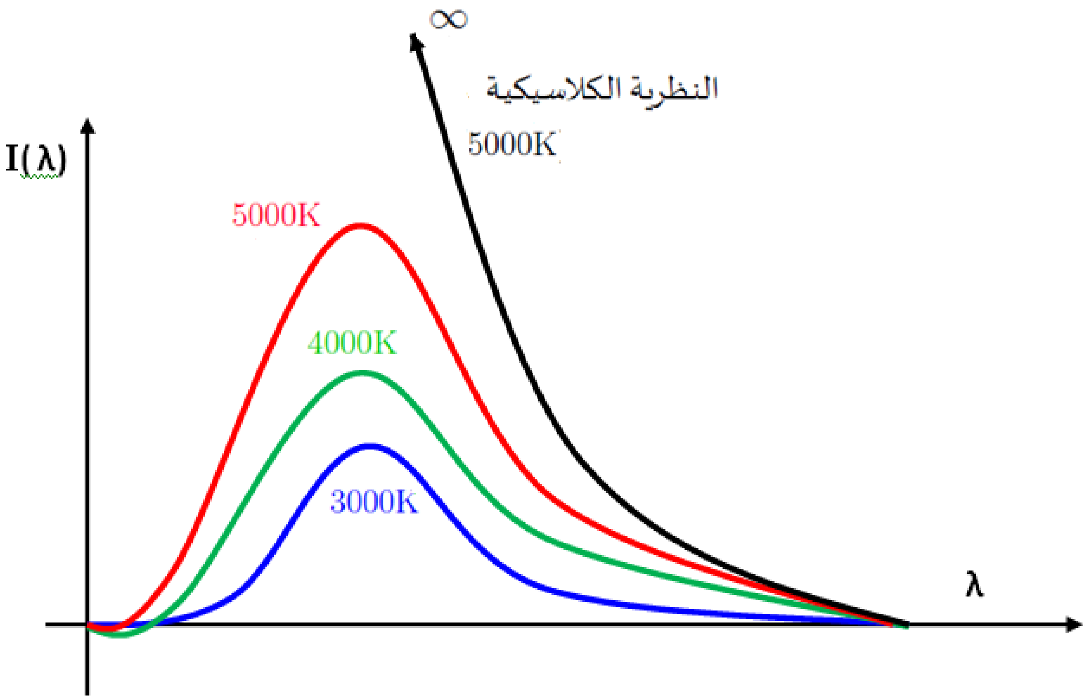
*- تزاد شدة الإشعاع بزيادة الطول الموجي الي حد معين.

*- بعد ذلك تقل شدة الإشعاع. أي أن شدة الإشعاع تقترب من الصفر عند الاطوال الموجية الكبيرة جدا و الصغيرة جدا.

*- شدة الإشعاع مرتبطة بعدد الفوتونات و ليس تردد الإشعاع.

الاستطاعة المتوسطة الصادرة عن سطح جسم أسود في وحدة المساحة من أجل طول موجة من λ الى λ+dλ ، الشكل 1

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5\left(\exp\left(\frac{\mathrm{hc}}{\lambda k_B T}\right) - 1\right)}$$



الشكل1: تغيردالة كثافة الاستطاعة الناتج عن جسم أسود بدلالة طول الموجة.

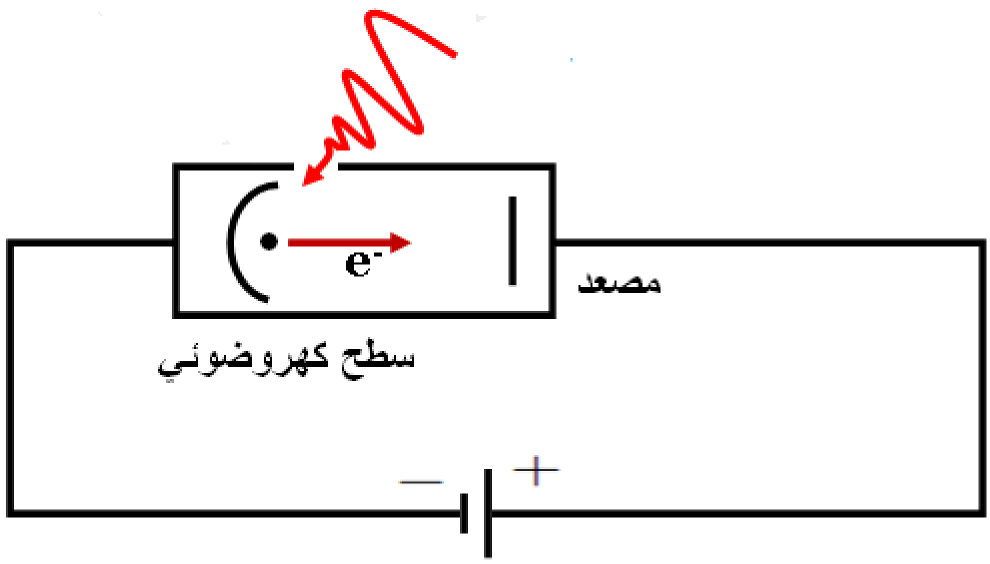
حيث c سرعة الضوء في الفراغ وk_B ثابت بولتزمان Boltzman و T درجة حرارة الجسم الاسود بالكالفن.

3- الفعل الكهروضوئي:

هي ظاهرة انبعاث الالكترونات من سطح معدني نتيجة اضاءته باشعاع كهرومغناطيسي ، الشكل 2 (ضوء احادي اللون) ذي تردد مؤثر، فينتج عن ذلك ان الالكترون لاينبعث عندما يكون تردد الفوتون اقل من تردد العتبة. وعندما يكون تردد الفوتون اكبر من تردد العتبة $\upsilon \gg \upsilon_0$ كل فوتون يبعث الالكترون بطاقة حركية تساوي :

$$E_k = h(\upsilon - \upsilon_0)$$

إن هذه الظاهرة تدل على الطبيعة الجسيمية المكممة للضوء إذ انه لو كان للضوء طبيعة موجية بحتة في هذه الحالة لتراكمت الطاقة و تسببت في إصدار إلكترونات حتى و لو كان $\upsilon \ll \upsilon_0$ ، إن الطاقة التي يمتلكها الفوتون جزء منها يتسبب في تشريد الاكترونات من المعدن و الجزء الباقي تكتسبه



الشكل 2 : مخطط دارة الفعل الكهروظوئي

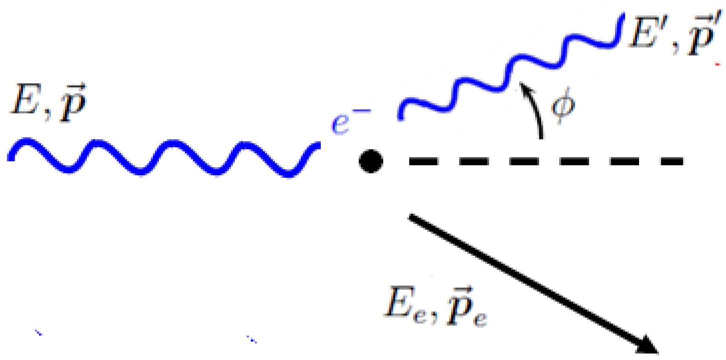
الاكترونات على شكل طاقة فتكون بذلك اقصى طاقة حركية يمتلكها الالكترون هي:

$$E_k^{max} = h(\upsilon - \upsilon_0)$$

الخلاصة : الضوء ليس اشعاعا مستمرا من الامواج ولكنه يتكون من رذاذ من الدقائق اي ان الاشعاع يتألف من جسيمات تدعى بالفوتونات. طاقة الفوتون الواحد $(E = h\upsilon = \hbar\omega)$.

4- ظاهرة كومبتن compton:

هو التصادم المرن بين الالكترون و الفوتون كما هو موضح في الشكل 3 ، نعتبر ان الاكترون ساكن.



الشكل 3 : التصادم Compton

كون التصادم المرن فهذا يعني انحفاظ الطاقة و الاندفاع ، أي أن :

$$\vec{P} = \vec{P'} + \vec{P}_e$$

$$E + m_e c^2 = E' + E_e$$

حيث $m_e c^2$ هي طاقة الالكترون و m_e هي كتلة الالكترون باستخدام قانون انشتاين لطاقة جسم :

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

و من اجل الفوتون $(m_\gamma = 0)$ فاننا نكتب طاقة الفوتون $E = pc$ لكن من جهة اخرى لدينا $E = h\upsilon$

و منه اندفع الفوتون هو:

$$p = \frac{h\upsilon}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

كما نلاحظ أيضا أن طاقة قبل التصادم (السكو ن -- $\vec{P} = 0$) هي $m_e c^2$

*- ان التغير في طول موجة الفوتون يؤكد أن للضوء طبيعة جسيمية مكممة ، إذ أنه حسب النظر الكلاسيكية للامواج الكهرومغناطيسية لا يمكن تفسير تغير طول موجة فوتون.

*- كما أننا افترضنا وجود تصادم مرن ، أي أن هناك تصادم بين جسيمات و ليس تداخل امواج

*- التصادم في هذه الحالة يشبه تصادم بين جسمين. ان تطابق التجربة مع النظرية يؤكد ان الفوتون له اندفاع هو $p = \frac{h}{\lambda}$ و بالتالي له طاقة $E = h\upsilon$.

*- ان الضوء في التصادم كومتن يفقد جزء من طاقة الالكترون ، بينما في ظاهرة الفعل الكهروضوئي فإن الاكترون يمتص الفوتون كليا.

الإزدواجية الموجية-الجسيمية

*- ازدواجية الجسيم والموجة للإشعاع الكهرومغناطيسي :

إن الإشعاع الكهرومغناطيسي مكون من جسيمات (دقائق) تسمى بالفوتونات ومن جانب آخر النتائج الخاصة بالتداخل والحيود لا يمكن تفسيرها الا بافتراض الصفة الموجية للإشعاع الكهرومغناطيسي.

- فكيف يمكن لهذين الرأيين المتناقضين ظاهريا أن يكونا متوافقين ؟

من النظرية النسبية الخاصة (معادلة اينشتاين) تعطى الطاقة الكلية لجسيم متحرك بالعلاقة التالية :

$$E^2 = c^2 P^2 + ({m_\gamma}^2 c^2)^2$$

من أجل فوتون (كتلته معدومة $m_y=0$) تصبح العلاقة

$$E^2 = c^2P^2 \rightarrow E = cP$$

$$\rightarrow P = \frac{E}{c}$$

$$E = h\upsilon$$

$$P = \frac{h\upsilon}{c}$$

$$\upsilon = \frac{1}{T}$$

$$P = \frac{h}{cT}$$

$$\lambda = cT$$

$$P = \frac{h}{\lambda}$$

λ: طول الموجة ، P: الدفع

العلاقة الأخيرة تشير الى ارتباط طول الموجة بكمية الحركة حيث أن كمية الحركة تصف الحالة المادية وهذه العلاقة لها أهمية كبيرة ألا وهي وصف للطبيعة الثنائية (موجة-جسم) وهي تسمى كذلك معادلة ديبرولي De Broglie

<u>مثـــــال</u>:

أحسب طول موجة دي برولي لإلكترون يسير بسرعة $V = 2.10^6\ m/s$

تعطى كتلة الإلكترون $m_e = 9{,}1.10^{-31}Kg$

ثم قارنها مع جسيم يسير10m/s وله كتلة تقدر ب $(1gm)$.

<u>الإجـــــابة:</u>

$$P = \frac{h}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h}{P}$$

$$\lambda = \frac{h}{mV} = \frac{6{,}62.10^{-34}}{9{,}1.10^{-31}2.10^6} \rightarrow \lambda = 3{,}6.10^{-10}m$$

$= 3.6A^o\lambda$

من أجل $m = 1gm$

$$\lambda = \frac{6{,}6.10^{-34}}{1.10^{-3} \times 10} = 6{,}6.10^{-32} = 6{,}6.10^{-22}A^o$$

إذن الجسيمات التي كتلتها كبيرة لا تظهر صفتها الموجية. لذلك الإلكترون صفته الموجبة واضحة .

ملاحظة : $h = 0$ معناها نحن في الميكانيك الكلاسيكي ، (تقتضي معالجة كلاسيكية للمسائل)

*- تجربة دافيسون وجيرمر Davisson et Germer

التجربة الاولى التي برهنت فرضية ديبرولي كانت من دافيسون وجيرمر 1927 وتتلخص فيما يلي :
تقذف بلورة من النيكل بوابل من الالكترونات بطاقة تقدر بحوالي 200 w.

النتيجة: الحصول على أشعة تنعكس بطريقة تشبه الحيود لموجات مستوية عن ذرات البلورة ذات المسافة (d) d= 0,91A° وبزاوية 65°

بتطبيق قانون براح Brogg نجد

$$n.\lambda = 2.d\,.sin\,(\theta)$$

$n = 1$ الطيف الأول

$$1 \times \lambda = 2 \times 0{,}91(0{,}9068)$$

$$\lambda = 1{,}65A^{o}$$

$$\lambda = \frac{h}{P} \qquad P = mV = m\sqrt{\frac{2mE}{m^2}}$$

$$P = mV \qquad P = mV = \sqrt{2mE}$$

$$E = \frac{1}{2}\,mV^2 \qquad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$$

$$2E = mV^2$$

$$V = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

***- مبدأ الارتياب :**

أو عدم الدقة في التحديد لـ هيزنبارغ:

يرتكز رأي المدرسة التحديدية على كون المسار موجودا لكننا لا نعرفه . بينما ترى المدرسة الاحتمالية أن المسار ليس حقيقة وكل ما يمكن معرفته هو احتمال العثور على الجسيم في هذا الموضع أو ذاك.

كما لا يمكن أن نعرف موضع جسم وكمية تحركه معا بدقة خاصة .

فإذا كان Δ_x هو الارتياب في موضع الجسيم ، ΔP_x هو الارتياب في الدفع فإن

$$\Delta_x . \Delta P_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \rightarrow \ (1)$$

$$\Delta E . \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad \rightarrow (2)$$

إن علاقات هيزنبارغ هذه تعني أنه لا يمكن قياس موضع الجسم ودفعه في آن واحد وبنفس الدقة ، فكلما زادت الدقة على الموضع نقص على الدفع ونفس الشيء بالنسبة للطاقة .

*حسب فلسفة المدرسة الاحتمالية .

*يوجد $\Psi(\vec{r},t)$ لوصف كل جملة فيزيائية ذات جسيم واحد .

*يوجد $\Psi(\vec{r_1},\vec{r_2} \dots \dots \vec{r_n},t)$ لوصف كل جملة فيزيائية ذات N جسم .

*تعبر طويلة $\Psi(\vec{r},t)$ عن كثافة احتمال حضور الجسيم في النقطة $\vec{r}$ عند اللحظة t

بمعنى آخر احتمال العثور على الجسيم في الحيز ح ، عند اللحظة t هو :

$$\iiint_{\epsilon} |\Psi(\vec{r},t)|^2 dr^3$$

حيث : عنصر الجسم $dr^3 = dxdydz$

لإذا كان :

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(\vec{r},t)|^2 dr^3 = 1$$

نقول عن Ψ منظم كما يجب .

*إذا كان :

$$\iiint |\Psi(\vec{r},t)|^2 dr^3 < \infty$$

نقول أن Ψ ذو مربع انجماعي

ملاحظـــــــة : التوابع ذات المربعات الانجماعية هي توابع قابلة للتنظيم

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(\vec{r},t)|^2 dr^3 = K \;\rightarrow\; \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\vec{r},t)|^2}{\sqrt{K^2}} = 1$$

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\Psi(\vec{r},t)}{\sqrt{K}}\right|^2 dr^3 = 1$$

أو نظيمة كما يجب .

بعض التمارين المقترحة في سلسلة الاعمال الموجهة للفصل الاول :

التمرين الأول :

نعتبر الأجزاء المتحركة لساعة اليد (ميقاتية) صغيرة جدا ، بإعطاء قيمة واقعية للوسائط الفيزيائية المميزة لساعة نموذجية .

- بيّن اعتمادا على المعيار المذكور في المحاضرة أنه لا علاقة للميكانيك الكوانتي بفن صناعة الساعات ؟

*__التمرين الثاني__ :

نعتبر دارة مهتزة مكونة من مكثفة سعتها $C = 10^2 pf$ ووشيعة ذاتيتها $L = .01mh$. نفترض أن الدارة تهتز بتوتر أعظمي بين طرفي المكثفة قدره $v = 1mv$.

- حاول إيجاد كمية فيزيائية طبيعية لها بعد فعل. واحسب قيمتها بوحدة ثابت بلانك h.

التمرين الثالث :

نموذج بور Bohr للذرات

نموذج بور النصف كمومي يعتمد على مزيج من أفكار كلاسيكية وأفكار كمية .

-اكتب عبارة كلاسيكية للطاقة الكلية للالكترون في ذرة الهيدروجين بدلالة r (نصف قطر المدار) وv (سرعته).

-استخدام قانون نيوتن بين أن الطاقة الكلية تساوي نصف الطاقة الكامنة .

-باعتبار أن للالكترون طول موجة $\lambda = \frac{h}{p}$ و أن محيط مداره من المضاعفات الصحيحة لطول الموجة .

-بين أن نصف قطر مدار الالكترون مكمم (اوجد علاقة التكميم بدلالة a_0 نصف قطر بور) ' ثم استنتج أن مستويات الطاقة في الذرة هي :

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0 n^2}.\frac{1}{n^2} = -\frac{13.6}{n^2}ev$$

الفصـــــــل الثـــانــــي

الجزء الاول

الاسس الرياضية للميكانيك الكوانتي

فضاء هيلبارت الحسي Hilbert

I/ تعريف: لتكن H مجموعة التوابع $Q_1(x), Q_2(x) \ldots\ldots\ldots Q_n(x)$

المحققة للشروط التالية :

- لا متناهية الاشتقاق.
- معدومة خارج مجال I
- ذات مربعات انجماعية :

$$\int |\Psi(x)|^2 dx < \infty$$

نشكل المجموعة H فضاء متجها على جسم الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ أو بعبارة أخرى هو فضاء التوابع التي لها سعات تجمع

1- H زمرة بالنسبة للجمع (+)

أ- الجمع عملية داخلية

$$Q_1(x) \in H, Q_2(x) \in H$$
$$\rightarrow Q_1(x) + Q_2(x) \in H$$

ب- العنصر الحيادي هو الصفر

$$Q(x) + 0 = 0 + Q(x) = Q(x)$$

ت- التجميع

$$(Q_1 + Q_2) + Q_3 = Q_1 + (Q_2 + Q_3) = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

ث- العنصر النظير نظير (Q_n) هو $(-Q_n)$

$$Q_n + (-Q_n) = (-Q_n) + (Q_n) = 0$$

2-الضرب السلمي في الفضاء H

أ- الضرب في عدد مركب

$$\alpha \in \mathbb{C} \quad Q_n \in H \rightarrow \alpha Q_n \in H$$

ب- العنصر الحيادي هو : 1

$$Q_n.1 = 1.Q_n = Q_n$$

ت- الضرب التجميعي

$$\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C} \qquad Q_n \in H$$

$$\rightarrow \alpha(\beta Q_n) = (\alpha\beta)Q_n = \alpha\beta Q_n$$

ث- التوزيع

*بالنسبة للأعداد المركبة

$$(\alpha + \beta)Q_n = \alpha Q_n + \beta Q_n$$

*بالنسبة لـ H

$$\alpha(Q_n + Q_m) = \alpha Q_n + \alpha Q_m$$

الفضاء H هو فضاء هيليارت الحسي .

II/ تعريف: ليكن $Q_n \in H$ و $Q_m \in I\!\!C$ معرفين على مجال I

1-يعرف الجداء السلمي لـ Q_n و Q_n بالعلاقة

$$(Q_n, Q_m) = \int_I Q_n^*(x).Q_m(x)dx$$

Q_n: هو العامل الأول و Q_m هو العامل الثاني .

*نظيم Q_n

أ- تعريف: يعرف نظيم Q_n بالعلاقة

$$\|Q_n\|^2 = (Q_n, Q_m) = \int_I Q_n^*(x)Q_n(x)dx = \int_I |Q_n(x)|^2 dx$$

ب- استنتاج: $(Q_n, Q_m) = 0 \rightarrow Q_n = 0$

2- التوابع المتعامدة:

يقال عن تابعين $Q_n \ , Q_m$ أنهما متعامدان إذا كان جداءهما السلمي معدوما .

$$(Q_n \, , Q_m) = 0 \ \rightarrow Q_n \perp Q_m$$

3- خواص الجداء السلمي :

أ- الجداء السلمي خطي بالنسبة للعامل الثاني :

$$(Q_m \ \ , Q_{n1} + Q_{n2}) = (Q_m , Q_{n1}) + (Q_m \ , Q_{n2})$$

$$(Q_m \, , \alpha Q_n) = \ \alpha(Q_m \, , Q_n)$$

ب- الجداء السلمي خطي مضاد بالنسبة للعامل الأول :

$$(Q_{m1} + Q_{m2} \, , Q_n) = (Q_{m1} \, , Q_n) + (Q_{m2} + Q_n)$$

$$(\alpha Q_m \, , Q_n) = \ \alpha^*(Q_m \, , Q_n)$$

ت- التبديل: بتبديل رتبة العاملين نحصل على الكمية

$$\left(Q_{m \, ,} Q_n\right) = (Q_n \, , Q_m)^*$$

- متراجحة شوارز

$$|(Q_m \, , Q_n)|^2 \leq \ \|Q_m\|^2 . \|Q_n\|^2$$

III/ خواص فضاء هيلبارت *H*

يتمتع الفضاء H بكل خواص الفضاء المتجهي

1- الاستقلالية الخطية : يقال عن المتجهات Q_n أنها مستقلة خطيا إذا تعذر التعبير عن رأي واحد منها بدلالة الآخر .

$$\sum_n b_n Q_n = 0 \rightarrow b_n = 0 \qquad \forall_n$$

2- **الأساس *H***: هي مجموعة متجهات H المستقلة خطيا

$$\Psi = \sum_n a_n \, Q_n$$

a_n هي مركبة Ψ على متجه الأساس Q_n

-الأساس المتعامد والمتجانس : (و يسمى كذلك بالاساس المعمّحد او الاساس المستنظم) هو أساس مشكل من متجهات طويلتها واحد وكلها متعامدة فيما بينها

المجموعة $\{Q_n\}$ اساسا معمحدا يستلزم أن

$$(Q_m , Q_n) = \delta_{nm}$$

حيث δ_{nm} هو رمز كرونيك

$$\begin{cases} \delta_{nm} = 1 & (n = m) \\ \delta_{nm} = 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

بعد الفضاء الضمني : هو عدد متجهات الفضاء الضمني المستقلة خطيا

مثال: لتكن $\{Q_1 , Q_2 , \ldots . . Q_p , Q_{p+1} , \ldots . . Q_n\}$ مجموعة المتجهات المتعامدة التي تولد الفضاء H

الـ : P متجهات الاولى تولد الفضاء الضمني H_p

الـ : N-P متجهات الاخرى تولد الفضاء الضمني H_{N-P}

بين أن H_P , H_{N-P} متعامدان ؟

لتكن $\Psi_p \in H_p$, $\Psi_{N-P} \in H_{N-P}$ كيفية

نحسب الجداء السلمي $(\Psi_{P,} \Psi_{N-P})$

بما أن:

$$\Psi_{N-P} = \sum_{m=n1}^{N} b_m Q_m \quad , \quad \Psi_P = \sum_{n=1}^{P} a_n Q_n$$

لدينا

$$(\Psi_P , \Psi_{N-P}) = \sum_{n,m} a_n^* b_m (Q_n , Q_m)$$

لدينا

$$(Q_n , Q_m) = \delta_{nm} = 0 \rightarrow n \neq m$$

$$(\Psi_P, \Psi_{N-P}) = 0 \rightarrow \Psi_P \perp \Psi_{N-P}$$

3- **عبارة المجموع والجداء السلمي بدلالة المركبات** :

أ- المجموع : لتكن:

$$\Phi = \sum_m b_m Q_m \ , \ \Psi = \sum_n a_n Q_n$$

$$\Psi + \Phi = \sum_{n=1} a_n Q_n + \sum_{m=1} b_m Q_m = \sum_n (a_n + b_n) Q_m$$

مركبة المجموع هي مجموع المركبات

ب- الجداء السلمي :

$$(\Psi, \Phi) = \sum_{n,m} a_n^* b_m (Q_n , Q_m) = \sum_n a_n^* b_n$$

لأن $(Q_n, Q_m) = \delta_{nm}$.

4- علاقة الانغلاق :

لتكن المجموعة $\{Q_m\}$ أساس لـ H من أجل Ψ كيفي لدينا

$$\Psi = \sum_n a_n Q_n$$

لنحسب الجداء السلمي : (Q_m , Ψ)

$$(Q_m , \Psi) = \sum_n a_n (Q_m , Q_n)$$

(Q_m , Ψ) هو مركبة Ψ على Q_m

إذن

$$\Psi(x) = \sum_n (Q_n , \Psi)\, Q_{n(x)} = \sum_n \int_I Q_n^*(x`)\Psi(x`)dx` . Q_n(x)$$

$$= \int_I Q(x`) \sum_n Q_n^*(x`) Q_n(x) dx`$$

$\sum_n Q_n^*(x`)Q_n(x)$ تابع متعلق بـ x و `x نضع

$$\sum Q_n^*(x`) Q_n(x) = \delta(x, x`)$$

$$\Psi(x) = \int_I \Psi(x`) \delta(x, x`) dx`$$

ومنه

لا يمكن لهذا أن يتحقق إلا إذا كان التابع $\delta(x,x`)$ هو توزيع ديراك الذي يعدم من اجل $x \neq x`$ ويساوي لا نهاية من اجل $x = x`$ ولا يتعلق $\delta(x,x`)$ إلا بالفرق $(x - x`)$ لذا نكتب

$$\delta(x\,,x`) = \delta(x - x`)$$

العلاقة $\sum_n Q_n^*(x`)Q_n(x) = \delta(x - x`)$

علاقة الانغلاق تعني ان مجموعة التوابع $\{Q_n\}$ تشكل أساسا تماما .

5- توزيع ديراك:

لتكن M مجموعة التوابع العقدية ذات المربعات الانجماعية أو المنتظمة بما يكفي G تطبيق على جسيم الأعداد المركبة $M \xrightarrow{G} \mathbb{C}$

$$f \to C = G(f)$$

G: توزيعا إذا كان خطيا ومستمرا على M

أ- الخطية : $\forall \mathrm{f}, \mathrm{g} \in M$ $\qquad \forall \lambda, \beta \in \mathbb{C}$

$$G(\lambda f + \beta g) = \lambda G(f) + \beta G(g)$$

ب- الاستمرارية:

$$\lim_n f_n(x) = f(x) \to \lim_n G(f_n) = G(f)$$

ملاحظة : كل تابع *h(x)* *ذي مربع انجماعي يعرف توزيعا بواسطة العلاقة*

$$h(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(x).\,f(x)dx$$

التوزيعات المتساوية :

يقال عن توزيعين α ’β أنهما متساويان إذا كان من اجل f كيفي متم لـ M: α(*f*)= β(*f*)

أي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^*(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta^*(x)f(x)dx.$$

توزيع ديراك:

هو التوزيع المعرف بالعلاقة

$$\delta(f) = f(0)$$

وبطريقة شكلية نكتب :

$$\delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx) = f(0)$$

ونكتب أيضا:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$$

وفي الفضاء نكتب :

$$\Psi(\overrightarrow{r_0}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\vec{r}).\delta(\vec{r}.\overrightarrow{r_0})dr^3$$

خواص توزيع ديراك:

$\delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|}\delta(x) \qquad \forall\lambda \in R \qquad \lambda \neq 0 \qquad -1$

$\delta(-x) = \delta(x)$ تابع زوجي $\qquad -2$

$\delta(x - \alpha)(x - \beta) = \frac{\delta(x-\alpha)+\delta(x-\beta)}{|\alpha - x|} \qquad \forall\, \alpha$ ،$\beta \in R$ ، $\alpha \neq \beta \quad -3$

$\delta(x^2 - \alpha^2) = \frac{\delta(x-\alpha)+\delta(x+\alpha)}{2|\alpha|} \qquad \forall\, \alpha \in \mathcal{R} \qquad \alpha \neq 0 \qquad -4$

$x\delta(x) = 0$ ، $x\delta(x - x_0) = x_0\delta(x - x_0) \qquad -5$

$(\vec{r}, \overrightarrow{r_0}) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) = \frac{\delta(r-r_0)\delta(\vartheta-\vartheta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)}{r^2 \sin\vartheta} - 6$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1 \qquad -7$

$\int \delta(a - x)\delta(x - b)dx = \delta(a - b) \qquad -8$

6- المؤثرات *Les opérateurs*

المؤثر : هو عبارة عن عملية رياضية تجرى على دالة لتغيرها إلى دالة جديدة ليس لها علاقة بالدالة الأصلية ، فإذا كان $\hat{A}$ مؤثرا رياضيا فانه : $\hat{A}\varnothing(x) = \Psi(x)$

بحيث Â مؤثر ونميزه عن غيره بوضع الإشارة (قبعة) فوق الحرف $\hat{A}$ ، ويمكن للمؤثر أن يأخذ صورا متعددة كالتفاضل $\frac{d}{\mathrm{dx}}$ و √ الجذر التربيعي أو احداثي (x ,y,z) .

مثال (1): نعتبر المؤثر التالي $\hat{F}$.

$$\hat{F} = \frac{\partial}{\partial x}x$$

أدرس تأثير المؤثر $\hat{F}$ على الدالة *f(x)*

الحل:

$$\hat{F}f(x) = \frac{\partial}{\partial x}(x.f(x))$$

$$= f(x) + x\frac{\partial}{\partial x}f(x)$$

$$= \left[1 + x\frac{\partial}{\partial x}\right]f(x)$$

نلاحظ أن المؤثر $\hat{F}$ يساوي

$$\hat{F} = \frac{\partial}{\partial x}.x - \left[1 + x\frac{\partial}{\partial x}\right]$$

مثال(2): أدرس تأثير المؤثر $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x}\ x^2$ على الدالة $g(x)$

$$\hat{A}g(x) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2.g(x))$$

$$= 2xg(x) + x^2\frac{\partial}{\partial x}g(x) = \left(2x + x^2\frac{\partial}{\partial x}\right)g(x)$$

أي أن المؤثر

$$\frac{\partial}{\partial x}\ x^2 = 2x + x^2\frac{\partial}{\partial x}$$

7- خواص المؤثرات :

1- المؤثر الخطي : نقول عن مؤثر أنه خطي إذا حقق العلاقتين :

$$\begin{cases} \widehat{\beta(\varphi_1+\varphi_2)} = \hat{\beta}\varphi_1 + \hat{\beta}\varphi_2 \\ \beta\alpha\varphi = \alpha\hat{\beta}\varphi \end{cases}$$

$$\alpha \in \mathbb{C} \qquad\qquad \varphi_1\,,\varphi_2 \in H$$

مثال:

$$\hat{\beta} = \frac{\partial}{\partial x} \qquad\qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1+\varphi_2) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x}(\alpha\varphi) = \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x} \end{cases}$$

إذن المؤثر $\hat{B}$ خطي :

2- ضرب المؤثران –المبدل :جداء مؤثرين خطيين $\hat{A}$ و $\hat{B}$ والذي يكتب $\hat{A}\,\hat{B}$ معرف كالآتي :

$$\Psi \xrightarrow{B} B\Psi \xrightarrow{A} (B\Psi) = AB\Psi$$

يؤثر B على Ψ لإعطاء BΨ ثم يؤثر A على التابع BΨ لإعطاء ABΨ، عموما BA≠AB ويعرف بمبدل مؤثرين والذي يكتب بالشكل الآتي: $[A\,,B]$

$$[A\,,B] = AB - BA$$

* تساوي مؤثرين : يقال عن مؤثرين أنهما متساويان إذا كان : $A\Psi = B\Psi$

تطبيق: احسب المبدل

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\,,f(x)\right] \quad \text{ثم} \quad \left[f(x),\frac{\partial}{\partial x}\right]$$

بالتطبيق على تابع كيفي نحصل :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\,,f(x)\right]\Psi(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,.f(x) - f(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\big(f(x).\Psi(x)\big) - f(x)\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x}$$

$$= f(x)\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x} + \Psi(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x} - f(x)\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x}$$

$$= \Psi(x).\frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\,,f(x)\right] = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \qquad , \qquad \left[f(x),\frac{\partial}{\partial x}\right] = -\frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

إذن المبدلين غير متساويين .

مثال 2: احسب المبدل

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\,,x\right]$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\,,x\right]\Psi(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x}(x)-(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x)$$

$$=\ \frac{\partial}{\partial x}\big(x.\Psi(x)\big)-x\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x))$$

$$=\ \Psi(x)\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial\Psi}{\partial x}-x\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\,,x\right]=1$$

مثال3: احسب المبدل

$$\left[x\,,\frac{\partial}{\partial x}\right]$$

$$\left[x\,,\frac{\partial}{\partial x}\right]\Psi=\left(x.\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}.x\right)\Psi(x)$$

$$=x.\frac{\partial}{\partial x}\Psi-\frac{\partial}{\partial x}(x.\Psi(x))$$

$$=x\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\Psi(x)-x\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

$$\left[x\,,\frac{\partial}{\partial x}\right]\Psi(x)=-\Psi(x)\rightarrow\left[x\,,\frac{\partial}{\partial x}\right]=-1$$

نستنتج أن:

$$[A\,,B]=-[B\,,A]$$

8- المبدلات

$$*\,[A\,,B+C]=[A\,,B]+[A\,,C]$$

$$*[\alpha A\,,B]=\alpha[A\,,B]$$

$$*\,[A\,,B]=-[B\,,A]$$

$$* [A, BC] = B[A , C] + [A , B]C$$

متطابقة جاكوبي :

$$[A , [B, C]] + \big[C, [A, B]\big] + \big[B, [C, A]\big] = 0$$

9- أصناف المؤثرات:

أ- المؤثر العكسي : يكون المؤثر A^{-1} هو المؤثر العكسي للمؤثر A اذا كان

$$A. A^{-1} = A^{-1}. A = 1$$

حيث 1 هو المؤثر المتطابق.

المؤثر العكسي للجداء AB هو:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}. A^{-1}$$

ب-المؤثر النائب: المؤثر النائب للمؤثر A والذي يكتب$^{+}$ معرف كالتالي:

$$(\emptyset , A\Psi) = (A^{+}\emptyset , \Psi)$$

المؤثر النائب للجداء AB هو

$$(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$$

ت-المؤثر الهرميتي أو الحقيقي : يقال عن مؤثر أنه هرميتي إذا كان $A = A^{+}$ أي أنه :

$$(\emptyset , A\Psi) = (A\emptyset , \Psi)$$

ملاحظة (1): القيمة الوسطية لمؤثر هرميتي :

$$\overline{A} = (\Psi , \mathrm{A}\Psi) = (\mathrm{A}\Psi , \Psi) = (\Psi , \mathrm{A}\Psi)^{*}$$

ملاحظة(2): الشرط اللازم والكافي لكي يكون جداء مؤثرين هرميتين هوميتيا هو قبولهما التبادل

$$(AB)^{+} = B^{+}A^{+} = BA$$

$$AB = BA \rightarrow [A , B] = 0$$

ث-المؤثر الواحدي أو القانوني : يكون المؤثر U واحديا إذا كان

$$UU^{+} = U^{+}U = 1$$

*القيمة الخاصة لمؤثر : إذا كان A مؤثرا خطيا و Ψ تابعا من الفضاء H

$$A\Psi = a\Psi \qquad\qquad a \in \mathbb{C}$$

الفصـــــــل الثـــانــــــي

الجزء الثاني

فضاء هيلبرت المجرد

ترميز ديراك *Notation de Dirac*

يقابل كل شعاع عادي $\vec{V}$ مصفوفة ذات عمود واحد عناصرها هي مركبات الشعاع $\vec{V}$ أي

$$\vec{V}\binom{v_x}{v_y}$$

ويقابل كل شعاع مرافق $\vec{V}^*$ لـ $\overrightarrow{V}$ مصفوفة ذات سطر واحد عناصرها هي مركبات المرافق العقدي لـ $\vec{V}$

$$\vec{V}^* = (v_x^*, v_y^* \ldots.)$$

في صياغة ديراك لميكانيكا الكم نجد أن الدالة الموجية تناظر متجه حالة في فراغ ذي أبعاد N ولا تحتاج متجهات الحالة إلى نظام إحداثيات خاص لتحديدها. هذا التعميم مشابه للمتجه في الفراغ الثلاثي الأبعاد والذي يتواجد بغض النظر عن استخدام نظام محاور إحداثيات خاص لتحديده بمجموعة من ثلاثة أرقام وتكتب متجهات ، والتي تؤثر عليها مؤثرات ميكانيكا الكم في صياغة ديراك كالتالي :

- متجه كات *ket*
- متجه برا *bra*

1- شعاع الموجة (كت *ket*) نسمي العارضتان $>$ $<$ في الانجليزية *braket*

فقسمت الكلمة إلى قسمين ، فكان القسم الأول $< |$ كات ket والثاني $| >$ برا *Bra* واصطلح على تسمية الشعاع $\vec{V}$ بالكات ونكتب :

$\vec{V} \equiv |V> \equiv \binom{v_x}{v_y}$ أما مرافقه $\vec{V}^*$ فقد سمي بـ برا ونكتب :

$$\vec{V}^* \equiv <V| \equiv (v_x^*, v_y^* \ldots \ldots.)$$

إذن مرافق كات هو برا

$$|v^* > = < v|$$

2-الجمع والضرب بعدد مركب : حسب مبدأ التركيب فإذا كان $|\Psi_1>$ ، $|\Psi_2>$ كاتين لحالتين كميتين لجملة فيزيائية فان مجموعهما هو أيضا حالة كمية أخرى $|\Psi>$ ينتمي إلى فضاء الحالات

$$|\Psi >= |\Psi_1 > + |\Psi_2 >$$

كما أن الكات $|\Psi >= \lambda|\Psi_1 >$ هو أيضا كات في فضاء الحالات .

3-الجداء السلمي : نرمز للجداء السلمي (الداخلي) للكاتيين $|\Psi_1 >$ و $|\Psi_2 >$ بهذا الترتيب وبالرمز $< \Psi_1|\Psi_2 >$ والذي نتيجته عدد مركب .

4-الخطية : نعتبر الدالة الخطية f التي تقون كل كيت منتم لـ H بعدد سلمي Ç منتم لـ Ȼ حيث :

$$f(\alpha|\Psi_1 > +\beta|\Psi_2 >) = \alpha f(|\Psi_1 >) + \beta f(|\Psi_2 >)$$

5-الصلة بين الكيت والبرا : كل كيت يقابله برا يقرن الكيت $|\Psi >$ بعدد مركب مساوي للجداء السلمي

$$(|\varphi > , |\Psi >) =< \varphi|\Psi >$$

هذه الصلة خطية مضادة .

البرا المقابل للكيت $\alpha|\varphi_1 > +\beta|\varphi_2 >$ هو

$$\alpha^* < \varphi_1| + \beta^* < \varphi_1|$$

وفعلا ' لنحسب الجداء السلمي من أجل $|\varphi >$ كيفي

$$(\alpha|\varphi_1 > +\beta|\varphi_2 > , |\Psi >) = \alpha^*(|\varphi_1 >, |\Psi > +\beta^*(|\varphi_2 >, |\Psi >)$$
$$= \alpha^* < \varphi_1|\Psi > +\beta^* < \varphi_2|\Psi >$$
$$= \alpha^*(< \varphi_1) + \beta^* < \varphi_2| , |\Psi >)$$

إذن فالبرا المقابل للكيت

$\alpha|\varphi_1 > +\beta|\varphi_2 >$ و $\alpha^* < \varphi_1| + \beta^* < \varphi_2$

6- كتابة ديراك للجداء السلمي :

بعض الخواص :

$$(|\varphi >, |\Psi >) =< \varphi|\Psi >$$
$$\varphi|\Psi >=< \Psi|\varphi^*$$
$$< \varphi|\alpha\varphi_1 + \beta\Psi_2 >= \alpha < \varphi|\Psi_1 > +\beta < \varphi|\Psi_2 >$$
$$< \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2|\Psi > = \alpha^* < \varphi_1|\Psi > +\beta^* < \varphi_2|\Psi >$$
$$< \lambda\Psi_1|\Psi_2 > = \lambda^* < \varphi_1|\varphi_2 >$$
$$< \varphi_1|\lambda\Psi_2 > = \lambda < \varphi_1|\varphi_2 >$$
$$< \Psi|\Psi > \geq 0$$

هذه العلاقة الأخيرة

$$\|\Psi\|^2 = <\Psi|\Psi>$$

$$\|\Psi\| = \sqrt{<\Psi|\Psi>}$$

نسمي المقدار $<\Psi|\Psi>$

مربع نظيم الكات $|\Psi>$ وهو مقدار موجب أو معدوم .

7-المرافق: لايجاد المرافق لتعبير ما نتبع ما يلي:

أ- تعويض العدد المركب بمرافقه $\alpha \to \alpha^*$

ب- ابدال المتجهات (الكات بالبرا والبرا بالكات)

$$(|\Psi>)^* \to <\Psi|$$

$$(<\Psi|)^* \to |\Psi>$$

ت-ابدال كل مؤثر بمرافقه الارميتية $T \to T^+$

ملاحظة : في حالة مؤثر مصفوفة مربعة مثلا

يتم الحصول على المرافق عن طريق :

إبدال الصفوف إلى أعمدة ، ثم اخذ المرافق لكل عنصر.

***- قاعدة الترافق**

ث-عكس ترتيب كل الكميات الموجودة في الترتيب

مثال: إيجاد مرافق التعبير الآتي:

$$\lambda <U|\hat{A}\hat{B}|V>$$

$$(\lambda <U|\hat{A}\hat{B}|V>)^* = \lambda^* <V|\hat{B}^+\hat{A}^+|U>$$

8- شروط التعامد والتجانس (علاقة العمحدة) أو تعرف بـ :

الأساس المتعامد والمستنظم:

في ترميز ديراك الجديد : يكون الكيتان $|\Psi_1>$ و$|\Psi_2>$ متعامدين إذا كان جداؤهما السلمي معدوما

$<\Psi_1|\Psi_2> = 0$ ويكون الكات مستنظما إذا كان نظيمه يساوي الواحد $<\Psi|\Psi> = 1$

تشكل الكاتات $|\emptyset_1>, |\emptyset_2>, \dots, |\emptyset_n>$ أساسا لفضاء الحالات ذي البعد n اذا أمكننا كتابة مايلي

$|\Psi> = \sum_{i=1}^{n} C_i|\emptyset_i>$ وفي الحالة التي يكون فيها الفضاء موصوفا باساس مستمر نكتب

$$|\Psi>= \int_{-\infty}^{+\infty} C(\alpha)|\emptyset_\alpha > d\alpha$$

ويكون الأساس متعامدا ومستنظما (أساس معحمّد) إذا تحقق ما يلي:

الأساس المتقطع

$$<\emptyset_i|\emptyset_j> = \delta_{ij}$$

الأساس المستمر

$$<\emptyset_\alpha|\emptyset_\beta> = \delta(\alpha-\beta)$$

بعض التمارين المقترحة في سلسلة الاعمال الموجهة للفصل الثاني :

التمرين الأول:

اثبت أن:

$$\delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|}\delta(x)$$

1- $\delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|}\delta(x)$ حيث $\lambda \in R$ ، $\lambda \neq 0$

$\delta(x)$ هو تابع ديراك .

2- $\delta(x) = \delta(-x)$

التمرين الثاني :

بإمكانك اخذ التكاملات التالية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\beta x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4\beta^3}} \qquad \beta \in R$$

بين أن التابع المستمر يحقق :

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}}$$

وذلك من أجل ε كيفي .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{\varepsilon}(x)dx = 1$$

التمرين الثالث:

ليكن الفضاء ذو بعدين وليكن $\{v_1, v_2\}$ أساس مستنظم (أساس معمّحد) بين أن $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ تكون كذلك أساس معمّحد بحيث :

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + iv_2)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_i - iv_2)$$

التمرين الرابع:

ليكن A , B , C ثلاث مؤثرات خطية و $\alpha \in \not{C}$ بين أن :

1- $[A , B + C] = [\mathrm{A}, \mathrm{B}] + [\mathrm{A} , \mathrm{C}]$

2- $[\alpha A , B] = \alpha[\mathrm{A} , \mathrm{B}]$

3- $[A , B] = -[B , A]$

4- $[A , BC] = B[A, C] + [A , B]C$

5- $\big[A , [B, C]\big] + \big[C , [A, B]\big] + \big[B , [C , A]\big] = 0$

التمرين الخامس:

أ-احسب المبدل

$$\left[x , \frac{d}{dx}\right] \quad \text{ثم} \quad \left[\frac{d}{dx} , x\right]$$

ماذا تستنتج؟

ب-احسب المبدلات الآتية :

$$\left[\frac{d}{dx} + x , \frac{d}{dx} - x\right], \qquad \left[x^2 , \frac{d2}{dx^2}\right]$$

التمرين السادس:

ليكن المؤثر الخطي $\hat{A}$ وتابعه الذاتي *f(x)* المقابل للقيمة الذاتية a .

1-اثبت أن *f(x)* تابع ذاتي للمؤثر $\hat{A}^n$ واحسب القيمة الذاتية المقابلة .

2- نعرف المؤثر $\hat{P}(\hat{A}) = \sum \alpha_n \hat{A}^n$ بين أن *f(x)* تابع ذاتي لـ $\hat{P}(\hat{A})$ واحسب القيمة الذاتية المقابلة.

التمرين السابع:

نعتبر مجموعة الدوال العددية *f(x)* والمؤثرين التاليين:

$$\hat{A} = \frac{d}{dx} + x \qquad , \hat{B} = \frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx} + x^2$$

1-اوجد التوابع الذاتية للمؤثر $\hat{A}$. هل طيف $\hat{A}$ منقطع أو متصل ؟ وهل قيمته الذاتية مولدة؟

2-بين أن التوابع الذاتية لـ $\hat{A}$ هي أيضا توابع ذاتية لـ $\hat{B}$ واحسب القيم الذاتية المقابلة.

بين أن القيمة الذاتية لـ $\hat{B}$ مولدة.

3-احسب المبدل $[\hat{A}, \hat{B}]$ واكتب عبارة $\hat{B}$ بدلالة $\hat{A}$.

التمرين الثامن:

احسب المبدل

$$\left[\frac{d^n}{x^n}, x^n\right]$$

يعطي مشتقة تابعين من الدرجة n

$$(g, f)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g^{(k)} f^{(n-k)}$$

مع توفيقة

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

الفصـــــــــل الثـــــانـــــي

الجزء الثالث

المؤثرات الخطية في كتابة ديراك

1- تعريف المؤثر الخطي A المعرف *على* H تطبيق يقرن خطيا كل كيت $H \ni$ H $>$ بالكيت المنتمي لـ H: بحيث $|\Psi >= A|\Psi >$

$$A(\alpha|\Psi_1 > +\beta|\Psi_2 >) = \alpha A|\Psi_1 > +\beta A|\Psi_2 >$$

2- كيفية تأثير مؤثر على برا:

ليكن A مؤثرا خطيا و $|\varphi >$ برا

من اجل كل $|\Psi >\in H$ نعتبر الدالة الخطية التي تقرن $|\Psi >$ بالجداء السلمي للكيتين $|\varphi >$ و $A|\Psi >$ والذي يتعلق خطيا بـ : $|\Psi >$

إذن فإعطاء البرا $|\varphi >$ والمؤثر A يعرف دالة خطية من H^* نكتبها $< \varphi|A$ ، تقرن كل كيت $|\Psi >$ من H بالجداء السلمي $< \varphi|(A|\Psi >)$ والذي نكتبه $(< \varphi|A)|\Psi >$ أو $< \varphi|A|\Psi >$

الجداء السلمي : $< \varphi|A|\Psi >$ هو العنصر المصفوفي للمؤثر A بين $|\varphi >$ و $|\Psi >$.

إذن المؤثر A يقرن كل برا $|\varphi >$ ببرا اخر $< \varphi`|$

$$< \varphi`| =< \varphi|A$$

إن هذا القران خطي :

$$(\alpha< \varphi_1| + \beta < \varphi_2|A = \alpha < \varphi_1|A + \beta < \varphi_2|A$$

3-الإرفاق الهرميتي :

المؤثر النائب ليكن A هو المؤثر الخطي الذي يحول الكيت $|\Psi >$ إلى $|\Psi` >$ .المؤثر النائب $A^+$ للمؤثر Aهو المؤثر الذي يحول البرا $|\Psi >$ الى البرا $< \Psi`|$

$$|\Psi` >= A|\Psi > \rightarrow < \Psi`| =< \Psi|A^+$$

المؤثر A^+ مؤثر خطي

$$(\alpha < \varphi_1| + \beta < \varphi_2|)A^+ = \alpha < \varphi_1|A^+ + \beta < \varphi_2|A^+$$

4- المؤثر الهرميتي :

يقال عن المؤثر A أنه هرميتي اذا كان $A = A^{+}$ أي:

$$< \varphi|A|\Psi >=< \Psi|A^{+}|\varphi >^{*}$$

أ- من خواص المؤثر الهرميتي القيم الذاتية له قيم حقيقية :

<u>مثال:</u>

ب-القيم الخاصة المتتالية لمؤثر هرميتي توافق كيتات خاصة متعامدة .

5- المؤثر الواحدي:

يقال عن مؤثر U أنه واحدي إذا كان

$$UU^{+} = U^{+}U = 1$$

6-أثر المؤثر:

ليكن $\{|n>\}$ أساس معمحد (مستنظم) أثر المؤثر A ، الذي يكتب T_rA أو δ_pA هو مجموع العناصر المصفوفية القطرية :

$$T_rA = \sum_n < n|A|n >$$

7- خواص الأثر :

أ-الأثر لا تحويلي :

أثر المؤثر لا يتعلق باختيار الأساس.

<u>مثال:</u>

ليكن لدينا $\{|n>\}$ و $\{|p>\}$ أساسين مستنظمين

نكتب T_rA

$$T_rA = \sum_n < n|A|n$$

ندخل علاقة الانغلاق على $\{|p>\}$ نجد أن:

$$T_rA = \sum_{n,p} < n|p >< p|A|n > = \sum_{p,n} < p|A|n >< n|p >$$

$$= \sum_{p,n} < p|A|n >< n|p >$$

باستخدام علاقة الانغلاق على الأساس $\{|n>\}$ نجد أن:

$$T_rA = \sum_p < p|A|p >$$

8- أثر جداء مؤثرات:

لا يتغير أثر جداء المؤثرات إذا بدلنا دائريا هذه المؤثرات

$$T_r AB = T_r BA$$

$$T_r ABC = T_r CAB = T_r BCA$$

9- توابع المؤثرات:

أ-القيمة الخاصة: لتكن a قيمة خاصة للمؤثر A مع الكيت الخاص $|\varphi >$ و $F(A) = \sum_p \alpha_p A^p$ تابعا للمؤثر A ، إذن $|\varphi >$ كيت خاص لـ : $F(A)$ مع القيمة الخاصة $F(a)$ بحيث :

$$F(a) = \sum_p \alpha_p a^p$$

بترميز ديراك نكتب

$$A|\varphi >= a|\varphi > \rightarrow F(A)|\varphi >= F(a)|\varphi >$$

10-اشتقاق المؤثر:

ليكن $A(+)$ مؤثرا متعلقا بالمتغير t. المشتقة $\frac{dA(+)}{dt}$ لـ $A(+)$ هي

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(t+\varepsilon) - A(+)}{\varepsilon_0}$$

قواعد الاشتقاق:

$$\frac{d}{dt}(F+G) = \frac{dF}{dt} + \frac{dG}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(F.G) = \frac{dF}{dt}G + F\frac{dG}{dt}$$

11- حفظ جبر المصفوفات:

كل العمليات الجبرية المعروفة على المصفوفات تحفظ في التمثيل بالكيتات والبرا والمؤثرات.

المصفوفة كيفية مربعة $\boldsymbol{M_{ij}}$ نذكر بعض الخواص :

المصفوفة المبدلة M_{ij}^t $\qquad$ $M_{ij}^t = M_{ji}$

المصفوفة النائبة M^+ $\qquad$ $M_{ij}^+ = (M_{ji}^t)^* = (\bar{M}_{ji}^t)$

المصفوفة العكسية M^{-1} $\qquad$ $MM^{-1} = M^{-1}M = 1$

$M = M^t$ متناظرة

$M = M^*$ حقيقية

$M = M^+$ هرميتية

واحدية $M^{-1} = M^{+}$

متعامدة $M^{-1} = M^{t}$

الملاحِظات :

الملاحظ: هو مؤثر هرميتي مجموعة كيتاته الخاصة تكون أساس مستنظم (معمحد) في H

الخواص:

-A ملاحظ فهو هرميتي

- مجموع الكيتات $\{|n>\}$ أساس مستنظم

- القيم الخاص للملاحظ حقيقية

- بالنسبة لملاحظ إذا كان له قيمتين خاصتين مختلفتين في حالة انحلال أو عدم انحلال فالكيتين التي تناسبه متعامدة.

البحث عن الكيتات الخاصة والقيم الخاصة للملاحظ .

للبحث عن القيم الخاصة يعود إلى تقطير المصفوفة التي تمثل الملاحظ

$$det[A - \lambda I]$$

λ: هي القيم الخاصة وعددها حسب بعد المصفوفة

I: المصفوفة الواحدية (الحيادية)

بالنسبة للكيتات الخاصة : كل تابع Ψ نستطيع نشره على أساس مستنظم

$$\begin{cases} |\Psi> = \sum_n an|n> & \rightarrow 1 \\ ||\Psi||^2 = 1 \rightarrow \sum_n |an|^2 = 1 & \rightarrow 2 \\ A|\Psi> = \lambda|\Psi> & \rightarrow 3 \end{cases}$$

حل هذه المعادلات الثلاثة يعطي مجموعة الكيتات الخاصة

12- مجموعة الملاحظات المتبادلة

<u>النظرية1:</u>

الجملة الكاملة المعمّحدة: الملاحظتين متبادلتين يوجد جملة كاملة معمّحدة من الكيتات الخاصة نسميها جملة كاملة معمّحدة

<u>نظرية2:</u>

إذا كان الملاحظين A و B جملة كاملة معمحدة فهم متبادلين .

- الجملة الكاملة للملاحظات المتبادلة (ECOC)

الملاحظات المتبادلة التي لها جملة كاملة معمّحدة نقول عنها أنها تكون جملة كاملة من الملاحظات المتبادلة.

في هذه الحالة كل ملاحظ جديد متبادل مع هذه الجملة هو تابع للملاحظات التي تكون الجملة.

نقول عن الملاحظات المتبادلة أنها متلائمة

ECOC : **E**nsemble **C**omplet d'**O**bservable qui **C**ommutent

13- المسقطات:

يكون المؤثر مسقط إذا كان هرميتي وعديم النمو:

$$\begin{cases} p = p^t \\ p = p^n \end{cases}$$

معادلة القيم الخاصة لمؤثر هرميتي A هي:

$$A|n >= a_n\,|N >$$

إذن مجموعة القيم الخاصة a_n هي تشكل الطيف A

*الانحلال أو التوليد : إذا وافق القيمة الخاصة an كيت خاص واحد $|n >$ نقول أن القيمة الخاصة a_n لا منحلة ودرجة التوليد (الانحلال) هي واحد g=1

إذا وافق القيمة الخاصة a_n عدد أكثر من 1 (g_n كيتا خاصا) مستقلة خطيا نقول في هذه الحالة أن القيمة الخاصة a_n منحلة أو مولدة ودرجة توليدها g_n

بعض التمارين المقترحة في سلسلة الاعمال الموجهة

التمرين الاول:

1-بين أن القيم الخاصة لمؤثر هرميتي حقيقية.

2-بين أن للقيم الخاصة لمؤثر هرميتي ، المختلفة ، كيتي الحالة متعامدة .

3-إذا كان U و احدي و$|\Psi >$ كيت خاص للمؤثرA (A مؤثر كيفي) مع القيمة الخاصة a ، بحيث :

$$A|\Psi >= a|\Psi >$$

بين أن

$$A^`\left|\Psi^`\right> = a\left|\Psi^`\right>$$

حيث أن :

$$\mathrm{A}^` = \mathrm{UAU}^+ \text{ و } \left|\Psi^`\right> = U|\Psi$$

4-بين أن القيم الخاصة لمؤثر واحدي تساوي طويلتها واحد.

التمرين الثاني:

$\{|n_2>, |n_1>\}$ أساس معمحد (مستنظم) هل $\{|p_2>, |p_1>\}$ أساس معمحد كذلك حيث

$$|p_1> = \alpha_1|n_1> + \alpha_2|n_2> \quad , \quad |p_2> = \beta_1|n_1> + \beta_2|n_2$$

ماهي الشروط الواجب أخذها عن

$$\beta_2 \ , \ \beta_1 \ , \ \alpha_2 \ , \ \alpha_1$$

التمرين الثالث :

ليكن H فضاء التوابع الكاملة (ذات المربعات الانجماعية) والمعدومة من اجل $x \notin [a, b]$ بحيث

$$f(a) = f(b) = 0$$

1- اثبت أن المؤثر $\hat{P} = -i\frac{d}{dx}$ خطي وهرميتي في هذا الفضاء .

2- عين التوابع الذاتية لـ $\hat{P}$ المقابلة لها.

ما طبيعة طيف القيم الذاتية ؟

3 - اذا كانت التوابع الذاتية لـ $\hat{P}$ دورية ، فعين علاقة القيم الذاتية والدوال الذاتية المرفقة لها.

4- اثبت أن: $\left[x, \frac{\partial}{\partial x}\right] = -1$

التمرين الرابع:

ليكن المؤثر b ومرافقه b^+ ، بحيث $[b, b^+] = 1$ نضع $N = b^+b$

1- بين أن:

أ- N هرميتي .

ب- القيمة الخاصة n لـ N مع الكيت الخاص $|n>$ موجبة أو معدومة .

ملاحظة :سنعتبر مجموعة الكيتات $|n>$ أساس معمحد (مستنـــظم) .

2- $b|n>$ و $b^+|n>$ هما كيـتي خاصـين لـ N مـع القيـم الخـاصـة *(n-1)* و *(n+1)* على التوالي.

2-ليكن المؤثرين :

$$P = i\frac{b^+ - b}{\sqrt{2}} \qquad\qquad Q = \frac{b^+ + b}{\sqrt{2}}$$

بين أن Q و P هرميتين و أن :

$$[Q, P] = i$$

التمرين الخامس:

ليكن $\{|1>,|2>\}$ أســاسا معمــحدا لفضـــاء ذي بعدين ، نعتبر الملحوظات (مؤثرات) الثلاث σ_x , σ_y و σ_z والتي مصفوفاتها الممثلة على الأساس المذكور هي:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1-أوجد القيم والكيتات الخاصة للمؤثرات σ_x , σ_y و σ_z

2-تحقق من علاقتي العمحدة والانغلاق بالنسبة لكيتات الخاصة للمؤثرات σ_x , σ_y و σ_z

3-أوجد المصفوفات الممثلة للمسقطات على الكيتات الخاصة للمؤثرات σ_x , σ_y و σ_z

4-بين أنه بالامكان كتابة كل مؤثر هرميتي H على الشكل

$$H = a_0 . 1 + a_x \sigma_x + a_y \sigma_y + a_z \sigma_z$$

حيث المعاملات هي :

$$a_i = \frac{1}{2} Tr(H\sigma_i) \qquad i = x , y , z$$

$$a_0 = \frac{1}{2} Tr(H)$$

التمرين السادس:

ليكن $\{|1>,|2>,|3>\}$ أســاسا مستنضما (أســاس معمّــحد) لفضــاء الحالات الثلاثة ابعاد الجملة الفيزيائية . لنعتبر S و L_z بحيث.

$$S|1> = |3> \qquad L_z|1> = |1>$$

$$S|2> = |2> \qquad L_z|2> = 0$$

$$S|3> = |1> \qquad L_z|3> = |3>$$

1- اكتب المصفوفتين الممثلتين في الاساس $\{|1>,|2>,|3>\}$ للمؤثرات التالية L_z و L_z^2 و S و S^2

2- هل هذه المؤثرات (ملاحظات) هرميتية .

3- هل $\{L_z^2, S\}$ يكون جملة كاملة من الملاحظات المتبادلة $(ECOC)$ اعطي اساس من الكيتات الخاصة المشتركة.

التمرين السابع:

نعتبر الجملة الفيزيائية ذات الاساس المتعامد و المتجانس قاعدته $\{|1>, |2>, |3>\}$

نمثل فيها المؤثرين التاليين بالمصفوفتين H وB .

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad B = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

حيث $\omega_0 \in \mathbb{R}$ $\qquad b \in \mathbb{R}$

1- هل H و B ملحوظتان (مشهودتان) هرميتيين.

2- احسب المبدل $[H, B]$ و اعط قاعدة مشتركة ذاتية لـ B وH إن أمكن.

من بين المجموعات للمؤثرات التالية $\{H\}$، $\{B\}$ ، $\{H, B\}$ ، $\{H^2, B\}$ أي المجموعات تشكل جملة كاملة من الملاحظات المتبادلة.

الفصـــــــل الثالث

الجزء الاول

معادلة شرودينجر

Equation de Schrodinger

تعرف معادلة شرودينجر بأنها المعادلة التفاضلية الموجية من الدرجة الثانية التي يعطي حلها ، الدالة الموجية التي تصف سلوك الجسيمات المادية الواقعة في مجال جهد ما اعتمادا على طبيعتها المادية.

ان أبسط صورة للدالة الموجية التي تصف جسيم متحرك هي موجة مستوية:

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 e^{i2\pi(kx-\nu t)}$$

وباستخدام العلاقات الآتية يمكن أن نكتب:

$$E = h\upsilon \qquad p = h/x \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} \qquad k = \frac{p}{h}$$

$$\Psi = \Psi_0 e^{i\frac{2\pi}{h}(p_x.x-Et)}$$

وهو شكل الموجة المستوية في الاتجاه x

$$\Psi = \Psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(p_x.x-Et)} \rightarrow \quad (1)$$

نفاضل هذه المعادلة الأخيرة بالنسبة للزمن

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \Psi_0\left(\frac{-iE}{\hbar}\right)e^{\frac{i}{\hbar}(p_x.x-Et)}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left(-\frac{iE}{\hbar}\right)\Psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(p_x-Et)}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}.\Psi$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = E\Psi \rightarrow \quad (2)$$

نفاضل كذلك المعادلة رقم (1) بالنسبة للمسافة (الموضع) x :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \left(\frac{i}{\hbar} p_x\right) \Psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et)}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{i}{\hbar} p_x \Psi$$

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x} = p_x \Psi \rightarrow \qquad (3)$$

في ميكانيك الكم سوف لن تتعامل مع كميات فيزيائية ولكن سوف تتعامل مع مؤثرات

نسمي مؤثر الطاقة (الهاميلتوني)

$$\hat{H} = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}$$

نسمي مؤثر كمية الحركة في الاتجاه (x) (الدفع)

$$\hat{p}_x = i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

كما أنه في الاتجاه العام يمكن كتابة مؤثر الدفع كالتالي:

$$p = -i\hbar \nabla$$

حيث:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

سنفرض الآن أن الجسم غير حر الحركة (أي يتحرك تحت تأثير جهد معين v) فان الطاقة الكلية له تساوي مجموع طاقته الحركية والكمونية v

الطاقة الكلية = طاقة الحركة + طاقة الجهد

$$E = T + V$$

حيث:

$$T = \frac{P^2}{2m}$$

$$E = \frac{P^2}{2m} + V$$

يقابل هذه المعادلة الكلاسيكية معادلة المؤثرات

$$p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{p_x^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2$$

$$\frac{p^2}{2m} + V = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + V$$

$$\hat{E} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \;\rightarrow \qquad (4)$$

وتأثير المؤثر للطاقة الكلية على الدالة الموجية Ψ يساوي نفس تأثير مؤثر الطاقة الممثل في المعادلة (4) على نفس الدالة Ψ.

أي أن: $H\Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi$

ولذلك يمكن كتابة

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left(\frac{-\hbar^2}{2m} . \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V\right)\Psi \rightarrow \quad (5)$$

وتسمى المعادلة الأخيرة بمعادلة شرودينجر التي تعتمد على الزمن .

ملاحظة خاصة:

عندما يكون الجهد يعتمد على المسافة فقط (أي دالة في المسافة فقط) لا يعتمد على الزمن.

يمكن كتابة الدالة الموجية كحاصل ضرب دالتين

$$\Psi(x,t) = u(x)\emptyset(t)$$

نعوض في معادلة شرودينجر التي تعتمد على الزمن.

$$i\hbar u(x). \frac{\partial \emptyset}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} . \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V\right) u(x)\emptyset(t)$$

$$i\hbar u(x)\frac{\partial \emptyset}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} . \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} . \emptyset(t) + V. u(x)\emptyset(t)$$

نقسم كلا الطرفين على $\emptyset(t).u(x)$

$$\frac{i\hbar}{\emptyset(t)}\cdot\frac{\partial\emptyset}{\partial t}=\frac{1}{u}\left(-\frac{\hbar^{2}}{2m}\cdot\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+V\right)u(x)$$

$$\frac{i\hbar}{\emptyset(t)}\cdot\frac{\partial\emptyset(t)}{\partial t}=\frac{1}{u(x)}\left(-\frac{\hbar^{2}}{2m}\cdot\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+V\right)u(x)$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن يعتمد أساسا على المسافة فقط في حين أن الطرف الأيسر يعتمد على الزمن فقط. لا يتساوى الطرفان إلا إذا كان كل منهما يساوي عددا ثابتا وليكن c

حساب c:

$$\frac{i\hbar}{\emptyset}\cdot\frac{\partial\emptyset}{\partial t}=\frac{1}{u}\left(-\frac{\hbar^{2}}{2m}\cdot\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+V\right)u=C$$

وهذه الأخيرة ينبثق منها معادلتان

$$\frac{1}{u(x)}\left(-\frac{\hbar^{2}}{2m}\cdot\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+V\right)u(x)=C\rightarrow\qquad(6)$$

$$\frac{i\hbar}{\emptyset(t)}\cdot\frac{\partial\emptyset}{\partial t}=C\rightarrow\qquad(7)$$

وحل المعادلة (7) وهي تتعلق بالزمن فقط.

$$\frac{\partial\emptyset}{\emptyset}=-\frac{i}{\hbar}\partial t.C$$

$$\int\frac{d\emptyset}{\emptyset}=\int\left(-{}^{i}/_{\hbar}\right)dt$$

$$\emptyset=e^{-\frac{i}{\hbar}ct}\rightarrow\qquad(8)$$

والدالة $\emptyset$ دالة مركبة وهي أيضا دالة دورية في الزمن ويمكن كتابتها على الصورة.

$$\emptyset=e^{-\frac{i}{\hbar}ct}=\cos\left(\frac{ct}{\hbar}\right)-i\sin\left(\frac{ct}{\hbar}\right)$$

حيث التردد الزاوي يساوي

$$wt = \frac{ct}{\hbar} \Rightarrow c = w\hbar$$

$$\Rightarrow c = 2\pi\upsilon\hbar$$

$$\Rightarrow c = 2\pi\upsilon . \frac{\hbar}{2\pi}$$

$$\Rightarrow c = \hbar\upsilon = E$$

إذن الشكل النهائي للمعادلة (8)

$$\emptyset = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

نعوض في المعادلة (6) عن المقدار الثابت بالطاقة ، ومن ثم نرتب المعادلة

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dx^2} + Vu = Eu(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} . \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + V . u(x) = Eu(x)$$

وهذه الأخيرة تسمى معادلة شرودينجر التي لا يعتمد على الزمن

وبشكل بسيط نكتب : $H\Psi = E\Psi$

الفائدة من حل معادلة شرودينجر :

1-معرفة الدالة الموجية Ψ

2-إيجاد قيمة الطاقة الأساسية E

3-معرفة المدار الذي يدور فيه الالكترون

4-معرفة طاقة الالكترون في كل مدار ، وقد تكون الطاقة متقطعة (منفصلة) أي أن هناك قيم محددة للطاقة مسموح بها .

$$p^2 = \hbar^2 k^2$$

الفصل الثالث

الجزء الثاني

البئر و الحاجز الكمونيان أحاديا البعد

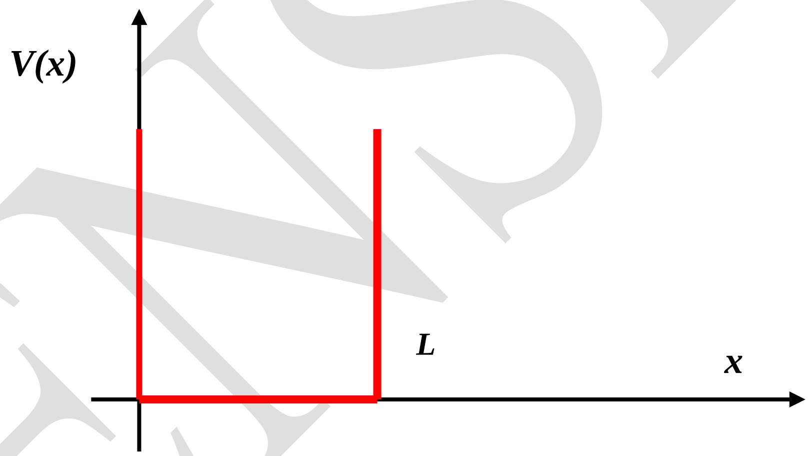
1- البئر الكموني اللانـهائي أحادي البعد:

نعتبر البئر الكموني اللانهائي أحادي البعد

$$V(x) = 0 \qquad 0 \leq x \leq L$$

$$V(\mathrm{x}) = \infty \qquad \mathrm{x} > l \quad \text{و} \quad \mathrm{x} < 0$$

لنعتبر جسيما مقيدا داخل البئر (مثل جسيم مقيد داخل علبة ذات جدران صلبة تماما) ، و نقتصر على الدراسة في بعد واحد.



الشكل 4 : البئر الكموني اللانـهائي أحادي البعد

الدراسة كلاسيكية:

الجسم يبقى داخل البئر الكموني بطاقة و اندفاع ثابتين ، كما يمكنه امتلاك اي طاقة حسب الشروط الاولية.

إذا علمت المسافة و السرعة في اي لحظة ، فإنه يمكننا معرفة المسافة في اي لحظة زمنية لاحقة.

الدراسة الكوانتية:

خارج البئر الكموني الدالة الموجية معدومة $\emptyset(x) = 0$ لأن $|\emptyset(x)|^2 = 0$ أي ان الاحتمال تواجد الجسيم خارج البئر معدومة .

ندرس إذن الدالة داخل المجال $0 \leq x \leq L$ حيث لدينا معادلة شرودينجر المستقلة عن الزمن .

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\emptyset(x)}{dx^2} + V(x)\emptyset(x) = E\emptyset(x)$$

بما انه الكمون داخل البئر معدوم $(x) = 0$ فإن:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\emptyset(x)}{dx^2} = E\emptyset(x)$$

$$\frac{d^2\emptyset(x)}{dx^2} = \frac{2mE}{\hbar^2}\emptyset(x)$$

$$\frac{d^2\emptyset(x)}{\emptyset(x)} = \frac{2mE}{\hbar^2}dx^2$$

و هي تمثل معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية تقبل حلا جيبيا عاما من الشكل:

$$\emptyset(x) = Asin(kx) + Bcos(kx)$$

او

$$\emptyset(x) = C_1e^{ikx} + C_2e^{-ikx}$$

حيث C_2 ، C_1 ثابتان مركبان (عقديان)

نأخذ k موجبا و بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد ان :

$$K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

و باستخدام الشروط الحدية (استمرارية الدالة الموجية عند الصفر) نجد ان :

$$C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$$

إذن الحل يكتب بالشكل الاتي :

$$\emptyset(x) = C_1\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) = 2iC_1 sin(kx) = Asin(kx)$$

لدينا في الشروط الحدية $x = L$ أي $x(L) = 0$ نجد ان:

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi$$

و عليه :

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

n عدد طبيعي موجب ، و منه نستنتج طاقة الجسيم المكممة حسب القيم المسموح بها لـ n

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$$

و حسب النتيجة الاخيرة فإنه عندنا عددا من سويات الطاقة المسموح بها حسب قيم المتعلقة بـ n. أي أن الجسيم داخل البئر لا يستطيع أن يأخذ أي مكان في البئر، سوى السويات (الأمكنة) المتوافقة مع قيم n وباقي الأمكنة محظور على الجسيم أن يتواجد بها.

و الدوال الذاتية للطاقة تحقق:

$$0 \leq x \leq L \qquad \emptyset_n(x) = Asin\frac{n\pi x}{L}$$

$$0 > x > L \qquad \emptyset_n(x) = 0$$

للحصول على ثابت الإستنظام نستخدم :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\emptyset_n(x)|^2 dx = 1$$

$$|A|^2 \int_0^L sin^2\frac{n\pi x}{L} dx = |A|^2 \int_0^L 1/2(1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)) dx = |A|^2 \frac{L}{2} = 1$$

من بين الحلين نختار الحل الموجب

$$A = \sqrt{(L/2)}$$

فتكون الدوال الذاتية للهميلتوني في المجال

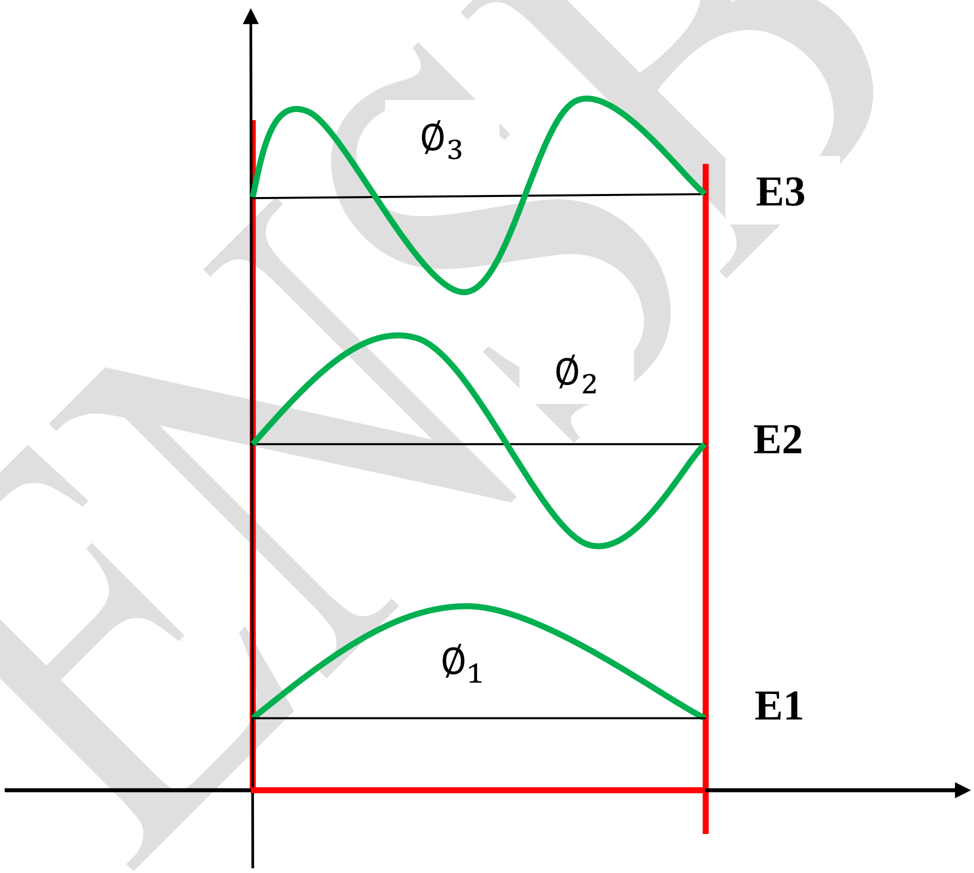
$$0 \leq x \leq L$$

$$\emptyset_n(x) = \sqrt{(L/2)}sin\frac{n\pi x}{L}$$

الموافقة للقيم الذاتية للهاميلتوني :

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2$$

و هكذا نجد أن كل دالة موجية تصف حالة من حالات الطاقة ، و القيمة المميزة توصف بدالة مميزة ، وبتمثيل ذلك على البئر نحصل على الشكل 5.



الشكل 5: تمثيل القيم الخاصة و الدوال الخاصة للطاقة في البئر الكموني

2- البئر الكموني المحدود:

نعتبر الجسيم m ذو الطاقة E موجودا في بئر كموني محدود أحادي البعد معطى بـالمواصفات التالية:

$$0 \leq x \leq L \qquad V(x) = 0$$

و

$$0 > x > L \qquad V(x) = V_0$$

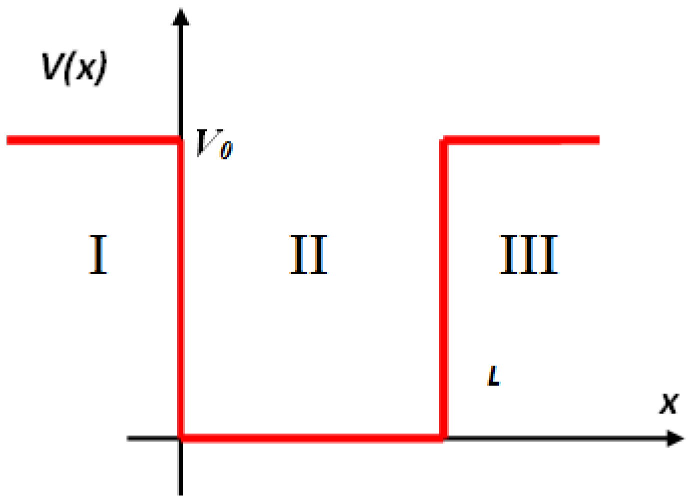
بحيث يكون : $0 < E < V_0$ اي ان الجسيم يكون مقيدا داخل بئر .

تُكتب معادلة شرودنجر المستقلة عن الزمن :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\emptyset(x)}{dx^2} + V(x)\emptyset(x) = E\emptyset(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\emptyset_i}{dx^2} = (E - V_i)\,\emptyset_i$$

حيث المؤشر   يمثل احد المجالات الثلاثة ، انظر الشكل 6.



الشكل 6 : البئر الكموني المحدود أحادي البعد

اذن كما هو معلوم فإن الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية الاخيرة يأخذ الشكل الاتي:

$$\emptyset_i(x) = A_i e^{ik_i x} + B_i e^{-ik_i x}$$

بالتعويض في معادلة شرودينجر نجد :

$$k_i^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_i)$$

في المجال II داخل البئر حيث الكمون معدوم يكون لدينا (باختيار القيمة الموجبة لــ$_2$):

$$k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E)$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

اما خارج البئر ، أي في المنطقتين الاولى و الثالثة يكون لدينا k_1 و k_3 عددين تخيلين :

(لأن $E < V_0$).

نضع

$$\gamma = ik_1 = ik_3 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}$$

فيصبح الحل :

$$\emptyset_{1,3}(x) = A_{1,3}e^{\gamma x} + B_{1,3}e^{-\gamma x}$$

3- الحاجز الكموني :

نعتبر موجة مستوية من الجسيمات ذات الاندفاع $p_x = \hbar k$ و الطاقة الحركية $E = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$

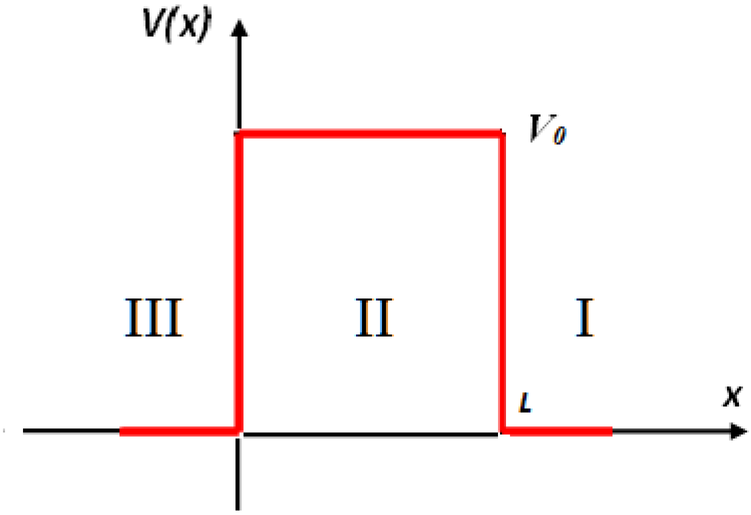
، تتحرك وفق اتجاه واحد موجب.

تواجه هذه الموجة تغيرا في الكمون نسميه حاجزا كمونيا محدودا و المعرف بــ:

$$0 \leq x \leq L \qquad V(x) = V_0$$

و

$$0 > x > L \qquad V(x) = 0$$



الشكل 7: الحاجز الكموني

الحالة اين $(E > V_0)$

تُكتب معادلة شرودنجر المستقلة عن الزمن :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\emptyset_i}{dx^2} = (E - V_i)\,\emptyset_i$$

حيث المؤشر يمثل احد المجالات الثلاثة ، انظر الشكل 7.

فالحل العام لهذه المعادلة التفاضلية الاخيرة يأخذ الشكل الاتي:

$$\emptyset_i(x) = A_i e^{ik_i x} + B_i e^{-ik_i x}$$

بالتعويض في معادلة شرودينجر نجد:

$$k_i^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_i)$$

و بالتالي نكتب الحلول بالشكل التالي للمناطق الثلاث :

$$\emptyset_1(x) = A_i e^{ik_1 x}$$

$$\emptyset_2(x) = A_2 e^{i\,k_2 x} + B_2 e^{-i\,k_2 x}$$

$$\emptyset_3(x) = A_3 e^{ik_3 x} + B_3 e^{-ik_3 x}$$

حيث :

$$k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)}$$

$$k_{1,3} = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

و باستخدام الشروط الحدية نحصل على قيم الثوابت : A_i ، B_i

الفصـــــــــل الرابع

الأسس الفيزيائية للميكانيك الكوانتي

الباب الاول

*- مسلمات الميكانيك الكوانتي

كلاسيكيا يمكن وصف جملة فيزيائية عند اللحظة t ، بواسطة الإحداثيات المعممة q_i وكميات الحركة المرافقة p_i ، وجمل المعادلات التفاضلية ، لهاميلتون- جاكوبي يعطي تطور مختلف المقادير الفيزيائية مع الزمن.

نتساءل عن كيفية وصف حالة جملة كوانتية ، عند اللحظة t ، وعما تكون النتيجة عند قياس مقدار فيزيائي ما ، وكيف تتطور حالة الجملة الفيزيائية مع الزمن.

I-المسلمات الهندسية:

في هذا الباب ، سوف نستعرض المسلمات الستة او الافتراضات الستة التي يرتكز عليها ميكانيك الكم.

1- المسلمة الأولى:

كل جملة فيزيائية تنتمي الى فضاء لهيلبرت ، وتوصف كل حالة من هذه الجملة بمتجه من هذا الفضاء .

أ-عند كل لحظة t ، توصف الحالة الكوانتية لجملة فيزيائية ، كلية ، بواسطة كيت $|\psi(+) >$ منتم إلى فضاء هيلبارت H . هذا الكيت يسمى كيت الحالة .

ب-إن وصفت جملة فيزيائية تقليديا بواسطة عدد ما من الإحداثيات المعممة q_i فانه بالإمكان اختيار فضاء "التوابع الصالحة" : $\int$ ، كفضاء حسي مقرون بالجملة الفيزيائية :

$$\Psi(q_i) =< \mathrm{q_i}|\Psi >$$

ج- إن وجدت درجات حرية كوانتية دون كفء تقليدي (كالسبين) ، عددها يكون منته ، وبالتالي يكون بعد الفضاء المقابل لها منته. وللحصول على فضاء هيلبارت المقرون بالجملة الفيزيائية ، نأخذ الجداء الممتدي للفضاء ذي الكفء التقليدي والفضاء الذي لا كفء تقليدي له.

د- توجد صلة بين الجبر في فضاء هيلبارت وتقلبات حالات جملة فيزيائية .

2-المسلمة الثانية :

يوافق كل مقدار فيزيائي قابل للقياس Ą ، بملاحظ (ملحوظة) مؤثر هرميتي A يؤثر في فضاء الحالات المعرف بــ: H

كون A ملاحظا أ مر أساسي ، ذلك أن مجموعة الكيتات الخاصة لملاحظ تشكل أساسا تاما لـ H ، وبالتالي نستطيع التعبير عن كل حالة للجملة الفيزيائية بواسطة الكيتات الخاصة لهذا الملاحظ.

3-المسلمة الثالثة :

النتائج التي يمكن الحصول عليها عند اجراء قياس لمقدار فيزيائي هي فقط القيم الذاتية للمؤثر الموافق للمقدار الفيزيائي المقاس ، كل نتيجة قياس أخرى غير ممكنة.

أ-يعطي كل قياس للمقدار Ą ، قيمة حقيقية ، لأن A ملاحظ وبالتالي فهو هرميتي وقيمه الخاصة حقيقية.

ب-قد تكون القيم الخاصة للملاحظ A منفصلة أو متصلة أو جزئيا متصلة ومنفصلة. فإذا كان طيف الملاحظ A منفصلا ، تكون النتائج المحصل عليها بقياس المقدار الفيزيائي Ą مكممة .

4-المسلمة الرابعة :

عند قياس مقدار فيزيائي للمؤثر Ą لجملة فيزيائية مستنظمة فإن سعة احتمال إيجاد القيمة الخاصة هو مربع نظيم .

$$|< n|\Psi >|^2$$

أي ان الجملة الكوانتية في الحالة $|\Psi >$ ، فان سعة احتمال إيجاد القيمة الخاصة a_n للملاحظ A ، كنتيجة لقياس المقدارĄ هي:

$$|< n|\Psi >|^2$$

حيث $|n >$ هو الكيت الخاص للملاحظ A مع القيمة الخاصة a_n .

أ-الاحتمال $\wp_n$ ، لايجاد القيمة الخاصة a_n كنتيجة لقياس المقدار Ą، هو:

$$\wp_n = |< n|\Psi >|^2 =< n|\Psi >< n|\Psi >^* =< \Psi|n >< n|\Psi >$$

التي هي القيمة الوسطية للمسقط العنصري

$$p_n = |n >< n|$$

في الحالة $|\Psi >$

واضح أن :

$$\sum_n \wp_n = \sum_n < \Psi|n >< n|\Psi >$$

$$=<\Psi|\Psi>=1$$

ب-الحالة التي يكون فيها $|\Psi>$ تابعا خاصا لـ A: :

$$|\Psi>=|m>$$

احتمال إيجاد القيمة الخاصة a_n ، كنتيجة لقياس هو:

$$p_n=|<n|\Psi>|^2=|<n|m>|^2=\delta_{nm}$$

إذن احتمال إيجاد القيمة الخاصة a_m كنتيجة لقياس مساو لـ: 1 ، واحتمال إيجاد قيمة أخرى معدوم. نقول أنه لا يوجد انحراف.

وإذا لم يكن $|\Psi>$ كيتا خاصا للملاحظ A ، فمن الممكن الحصول على مختلف القيم الخاصة a_n ، كنتائج لقياس المقدار Ą، بالاحتمالات p_n

5- المسلمة الخامسة:

إذا أعطى قياس المقدار الفيزيائي Ą ، على الجملة في الحالة $|\Psi>$ ، النتيجة a_n ، فان حالة الجملة مباشرة بعد اجراء عملية القياس تكون مساوية للاسقاط المنظم :

$$\frac{p_n|\Psi>}{\sqrt{<\Psi|p_n|\Psi>}}$$

للكيت $|\Psi>$ على الفضاء الخاص للقيمة الخاصة a_n

أ-إذا كانت$\{|n^i>, i=1,\ldots g_n\}$ هي مجموعة الكيتات الخاصة ، المستقلة خطيا و الموافقة للقيمة الخاصة a_n :

$$A|n^i>=a_n|n^i>$$

فان المسقط p_n على الفضاء الخاص لـ a_n : هو :

$$p_n=\sum_{i=1}^{g_n}|n^i><n^i|$$

ب-حالة الجملة الفيزيائية ، بعد القياس مباشرة ، تكون كيتا خاصا للملاحظ A مع القيمة الخاصة a_n

II- المسلمة الحركية:

يقرن موضع الجسيم : $\vec{r}(x,y,z)$ بالملاحظ : $\hat{\vec{R}}(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ ويقرن الدفع $\vec{p}(p_x,p_y,p_z)$ بالملاحظ $\hat{\vec{p}}(\hat{p}_x,\hat{p}_y,\hat{p}_z)$:

أ- توجد غالبا عشوائية في اختيار المؤثرات لذلك نبحث على المحافظة على أقصى ما يمكن من العلاقات التقليدية بين المتغيرات:

الهاميلتوني التقليدي: $H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$ حيث $V(\vec{r})$ هو الطاقة الكامنة و m هي الكتلة ، يقابله المؤثر الهاميلتوني :

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{\vec{R}})$$

/العزم الحركي التقليدي: $\vec{\ell} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ يقابله العزم الحركي الكوانتي:

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{R}} \wedge \hat{\vec{P}}$$

وبالنسبة للمركبات نحصل على العلاقات التالية :

-تقليديا:

-كوانتيا:

$$\hat{\vec{L}} \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \hat{p}_x & \hat{p}_y & \hat{p}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{y}\hat{p}_z - & \hat{z}\hat{p}_y \\ \hat{z}\hat{p}_x - & \hat{x}\hat{p}_z \\ \hat{x}\hat{p}_y - & \hat{y}\hat{p}_x \end{vmatrix}$$

المؤثرات $\hat{\vec{R}}$, $\hat{\vec{P}}$, $\hat{\vec{L}}$ مؤثرات متجهية لأنها تكتب كالمتجهات ولها مركبات.

ب-كيفية اختيار مؤثر الدفع :

/المتغيرات المترافقة قانونيا غيرمتبادلة. فإذا وصفت الجملة الفيزيائية تقليديا بالإحداثيات المعممة q_i والدفع المعمم p_i ، تكون الملاحظات $\hat{Q}_i$ و $\hat{P}_i$ الموصولة بها كوانتيا خاضعة لعلاقات التبادل التالية :

$$[\hat{Q}_i , \hat{Q}_j] = [\hat{P}_i , \hat{P}_j] = 0$$

$$[\hat{Q}_k , \hat{P}_j] = i\hbar \ \delta_{kj}$$

/لقد رأينا في الفصل الأول أن:

$$\left[\hat{x} , \frac{d}{dx}\right] = -1$$

وباستعمال خواص المبدلات نحصل على:

$$\left[\hat{x} , -i\hbar\frac{d}{dx} + f(\hat{x})\right] = i\hbar$$

وبما أن $\hat{P}_x$: و $\hat{X}$ مترافقة قانونيا لدينا

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$$

وبالمقارنة نحصل على:

$$\hat{P}_x = -i\hbar\frac{d}{dx} + f(\hat{x})$$

لكن $f(\hat{x})$ تابع كيفي لـ : $\hat{x}$ ، نصطلح على أخذ :

$$f(\hat{x}) \equiv 0$$

ونختار :

$$\hat{P}_x = -i\hbar\frac{d}{dx}$$

ومن ذلك نستنتج مؤثر الدفع :

$$\hat{\vec{P}} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

حيث $\vec{\nabla}$ هو التدرج (نابلا):

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

/بإمكاننا الآن كتابة المؤثر الهاميلتوني H ، إذ مما سبق ذكره نستنتج :

$$\hat{P}^2 = -\hbar^2\nabla^2 = -\hbar^2\Delta$$

حيث :Δ هو اللا بلاسي (دلتا):

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ومنه :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\hat{\vec{R}})$$

وإذا كان لدينا N جسيم ، يكون الهاميلتوني هو:

$$H = \sum_{\alpha=1}^{N} -\frac{\hbar^2}{2m_\alpha}\nabla_\alpha^2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} V_{\alpha\beta}$$

الذي نستطيع كتابته على النحو التالي :

$$H = \sum_{\alpha=1}^{N} -\frac{\hbar^2}{2m_\alpha}\nabla_\alpha^2 + \sum_{\alpha<\beta} V_{\alpha\beta}$$

III-المسلمة الديناميكية:

تعطي معادلة شرودينغار المتعلقة بالزمن:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(+)> \ = H(t)|\Psi(+)>$$

تطور كيت الحالة $|\Psi(+)>$ ، مع الزمن ، حيث $H(t)$ هو الملاحظ الهاميلتوني المقرون بالطاقة الكلية للجملة.

أ- تعطي المسلمة الديناميكية الكفء الكوانتي لمعادلات نيوتن.

ب- من معادلة شرودينغر المتعلقة بالزمن نستخلص :

$$H = i\hbar\frac{d}{dt}$$

ولو حسبنا الآن المبدل $[(-t), H]$ لوجدنا :

$$[(-t), H] = i\hbar$$

التي هي قيمة المبدل في حالة المتغيرات المترافقة قانونيا ، وبالتالي نقول أن (t-) هو المتغير المرافق القانوني للهاميلتوني H .

ج- غالبا تكون المؤثرات والكيتات الخاصة متعلقة بالزمن ، لكن لدينا تمثيلان :

تمثيل هايزنبارغ

يعتبر هايزنبارغ أن الكيتات غير متعلقة بالزمن $\frac{\partial}{\partial t}|\Psi> = 0$ ، بينما تتعلق المؤثرات بالزمن :

$$A = A(t)$$

/تمثيل شرودينغار

يعتبر شرودينغار أن الكيتات هي التي تتعلق بالزمن $|\Psi> = |\Psi(t)>$ ، وتكون المؤثرات غير متعلقة صراحة بالزمن ، لكنها قد تتعلق به ضمنيا :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

البـــاب الــــثاني

تطبيــــــــــــقات

I- متراجحة هايزنبارغ:

1-القيمة الوسطية للملاحظ :

القيمة الوسطية للملاحظ A في الحالة $|\Psi>$ هي:

$$\bar{A} =<\Psi|A|\Psi>$$

كما نستطيع كتابة $\bar{A}$ ، بدلالة القيم الخاصة a_n للملاحظ A ، والاحتمالات $\wp_n$ ، لإيجاد القيم الخاصة a_n كنتيجة لقياس المقدار Ą المقرون بالملاحظ A.

فإذا كان:

$$A|n> = a_n|n>$$

و:

$$\wp_n = |<n|\Psi>|^2$$

فان:

$$\bar{A} =<\Psi|A|\Psi>=\sum_n <\Psi|A|n><n|\Psi>$$

$$= \sum_n a_n|<n|\Psi>|^2$$

$$\bar{A} = \sum_n a_n\, \wp_n$$

2-انحراف القياس, أو تبعثر القياس:

انحراف القياس أو انحراف الرابعي المتوسط للمقدار المقرون بالملاحظ A ، هو:

$$\overline{\Delta A^2} =<\Psi|(A-\bar{A})^2|\Psi> = \overline{(A-\bar{A})^2}$$

الذي نستطيع كتابته على النحو التالي :

$$\overline{\Delta A^2} = \overline{A^2 + \overline{A}^2 - 2A\bar{A}}$$

$$= \overline{A^2} + \overline{A}^2 - 2\overline{A}^2$$

ومنه :

$$\overline{\Delta A^2} = \overline{A^2} + \overline{A}^2$$

كما نستطيع كتابة $\overline{\Delta A^2}$ ، بدلالة القيمة الخاصة a_n للملاحظ A ، والاحتمالات $\wp_n$ السالفة الذكر:

$$\overline{\Delta A^2} =< \Psi\left|(A-\overline{A})^2\right|\Psi >$$

$$= \sum_n < \Psi\left|(A-\overline{A})^2\right|n >< n|\Psi >$$

$$\overline{\Delta A^2} = \sum_n (a_n - \overline{A})^2 \wp_n$$

3- متراجحة هايزنبرغ (علاقة الارتياب):

نعتبر الملاحظين A و B ، تعبر الكميتان $\overline{\Delta A^2}$ و $\overline{\Delta B^2}$ عن نحرافات القياس عن القيم الوسطية $\overline{A}$ و $\bar{B}$.

نريد علاقة بين $\overline{\Delta A^2}$ و $\overline{\Delta B^2}$ ، تعطينا إمكانية قياس المقدارين Ą و ß المقابلين للملاحظين A و B في أن واحد ، والانحراف (أو الارتياب)الناتج عن ذلك.

أ-الحالة التي تكون فيها الملاحظات متبادلة $[A\,,B] = 0$:

لهذه الملاحظات المتبادلة جملة معمحدة كاملة من الكيتات الخاصة :

$$A|n > = a_n|n >$$

$$B|n > = b_n|n >$$

فإذا كانت الجملة في الحالة $|\Psi >$:

$$|\Psi > = \sum_n |n >< n|\Psi >$$

احتمال قياس القيمة الخاصة a_n هو: $\wp_n = |< |\Psi >|^2$

واحتمال قياس القيمة الخاصة b_n هو: $\wp_n = |< |\Psi >|^2$

إذن إذا تبادلت الملاحظات ، فمن الممكن قياس المقادير الفيزيائية المقرونة بها في أن واحد وبدقة. يقال عن هذه الملاحظات أنها متلائمة .

ب-الحالة التي تكون فيها الملاحظات غير متبادلة $[\,,B] \neq 0$

نحسب الانحرافات $\overline{\Delta A^2}$ و $\overline{\Delta B^2}$ ، والجداء : $\overline{\Delta A^2}.\overline{\Delta B^2}$.

بوضع :

$$(A-\overline{A})|\Psi > = |\Psi_A > \quad \text{و} \quad (B-\bar{B})|\Psi >= |\Psi_B >$$

نجد:

$$\overline{\Delta A^2} = <\Psi\left|\left(A-\overline{A}\right)\left(A-\overline{A}\right)\right|\Psi>$$
$$= <\Psi_A|\Psi_A>$$
$$= \ \|\Psi_A\|^2$$

و:

$$\overline{\Delta B^2} = <\Psi|(B-\bar{B})(B-\bar{B})|\Psi>$$
$$=<\Psi_B|\Psi_B>$$
$$= \|\Psi_B\|^2$$

من ذلك نستنتج الجداء:

$$\overline{\Delta A^2}.\overline{\Delta B^2} =<\Psi_A|\Psi_A><\Psi_B|\Psi_B>$$

وباستعمال متراجحة شوارز :

$$<\Psi_A|\Psi_A><\Psi_B|\Psi_B> \ \geq \ <\Psi_A|\Psi_B><\Psi_B|\Psi_A>$$

نحصل على :

$$\overline{\Delta A^2}.\overline{\Delta B^2} \geq \ <\Psi_A|\Psi_B><\Psi_B|\Psi_A>$$

لكن:

$$<\Psi_A|\Psi_B><\Psi_B|\Psi_A> \quad \mathcal{J}_m <\Psi_A|\Psi_B>$$

حيث الرمز $\mathcal{J}_m$ يعني الجزء التخيلي ، اذن :

$$\overline{\Delta A^2}.\overline{\Delta B^2} \geq \ |\,\mathcal{J}_m \ <\Psi_A|\Psi_B>|^2$$

أي:

$$\overline{\Delta A^2}.\overline{\Delta B^2} \geq \left|\frac{<\Psi_A|\Psi_B> - <\Psi_B|\Psi_A>}{2i}\right|^2$$

الذي نستطيع كتابته على النحو التالي:

$$\overline{\Delta A^2}.\overline{\Delta B^2} \geq \frac{1}{4}|<\Psi_A|\Psi_B> - <\Psi_B|\Psi_A>|^2$$

وبما أن:

$$<\Psi_A|\Psi_B> - <\Psi_B|\Psi_A> =<\Psi|[A\,,B]|\Psi>$$

إذن:

$$\overline{\Delta A^2}.\overline{\Delta B^2} \geq \tfrac{1}{4}|<\Psi|[A\,,B]|\Psi>|^2$$

التي هي علاقة الارتياب.

ملاحظة:

عادة نصطلح على أن:

$$\sqrt{\overline{\Delta B^2}} = \Delta B \qquad\qquad \sqrt{\overline{\Delta A^2}} = \Delta A$$

ونكتب علاقة الارتياب كالتالي :

$$\Delta A.\Delta B = \frac{1}{2}|< \Psi|[A\,,B]|\Psi >|$$

*أمثلة:

أ-نعتبر ملاحظي الموضع $\hat{P}$ والدفع $\hat{X}$. نعلم أن

$$[\hat{X}\ \ ,\hat{P}_X] = i\hbar$$

وبالتالي:

$$\Delta X.\Delta P_X \geq \frac{\hbar}{2}$$

ب-نعتبر ملاحظة الطاقة H و الزمن t ، لدينا:

$$[-t\ \ ,H] = i\hbar$$

وبالتالي:

$$\Delta H.\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

4-علاقة الارتياب وحالة الجسيم :

لتعريف حالة جملة تقليدية,لا بد من تحديد مجموعة من الأعداد المعبرة عن إحداثياتها ومركبات سرعتها, وبذلك نكون قد حددنا أيضا مقادير فيزيائية أخرى كطاقة الجملة ودفعها وعزمها الحركي .

تبين علاقات الارتياب أن إتباع مثل هذه الطريقة غير ممكن بالنسبة للجمل الكوانتية. فإذا كان الدفع محددا بدقة على محور معين يكون الموضع غير محدد على نفس المحور, فالكترون ذرة مثلا يملك طاقة محددة لكن موضعه داخل الذرة غير محدد.

وهكذا ، يكون من الممكن تجميع المتغيرات الديناميكية المميزة لجملة كوانتية إلى مجموعات مقادير فيزيائية نستطيع تحديدها بدقة في أن واحد ، أي المقادير الفيزيائية المتواقتة القياس ، فتشكل هذه المجموعات جملا كاملة من المقادير الفيزيائية المتواقتة القياس ، وهو ما يوافق الجمل الكاملة من الملاحظات المتبادلة التي ذكرناها في الباب الثاني من الفصل الأول .

كما تشكل مختلف حالات الجملة الكوانتية مجموعات حالات ، بحيث تتعلق كل مجموعة بجملة كاملة من المقادير الفيزيائية المتواقتة القياس ، وتحتوي حالات تكون من أجلها مختلف هذه المقادير محددة جيدا في

أن واحد . توافق هذه الحالات الجملة المعمحدة الكاملة المشتركة التي ورد ذكرها ف الباب الثاني من الفصل الأول.

فلتمييز جملة كوانتية كالإلكترون أو الفوتون التي لها أربع درجات حرية ، نعتبر مجموعات كاملة من المقادير الفيزيائية المتواقتة القياس ، مثل:

X , y, z , σ أو p_x , p_y , p_z , σ : أو: E , L , M , σ

حيث X , y, z هي مركبات الوضع ، p_x , p_y , p_z هي مركبات الدفع ، E هي الطاقة

L ، M،σ هي الأعداد الكوانتية المدارية والمغناطيسية و السبينية على التوالي.

مع الملاحظة أن مركبات الوضع والدفع تنتمي إلى مجموعات مختلفة .

II-معادلة شرودينغار المستقلة عن الزمن

1-مراجعة عن التمثيلين$\{|\vec{r}>\}$ ، $\{|\vec{p}>\}$:

أ-تعريف:

ليكن $\hat{\vec{R}}(\hat{x} , \hat{y} , \hat{z})$ و $\hat{\vec{P}}(\hat{p}_x , \hat{p}_y , \hat{p}_z)$ مؤثري الموضع والدفع المقرونين بالموضع $\vec{r}(x ، y ، z)$ والدفع $\vec{p}(p_x p_y p_z)$ التقليديين ، نعتبر الأساسين المتصلين $\{|\vec{r}>\}$ و $\{|\vec{p}>\}$ ، التي سبق تعريفها بحيث:

$$< \vec{r}|\vec{r} > = \delta(\vec{r} \_ \vec{r}')$$

و:

$$< \vec{r}|\vec{p} >= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3/2} \quad e^{i/\hbar \vec{p}.\vec{r}}$$

تعريفا لدينا:

$$\hat{\vec{R}}|\vec{r} > = \vec{r}|\vec{r} >$$

$$\hat{X}|\vec{r} > = X|\vec{r} >$$

$$\hat{y}|\vec{r} > = y|\vec{r} >$$

$$\hat{z}|\vec{r} > = z|\vec{r} >$$

$$\hat{x}|x > = x|x >$$

$$\hat{y}|y > = y|y >$$

$$\hat{z}|z > = z|z >$$

$$\hat{\vec{P}}|\vec{p} > = \vec{p}|\vec{p} >$$

$$\hat{p}_x|\vec{p}> = p_x|p>$$

$$\hat{p}_x|p_x> = p_x|p_x>$$

كما نحصل على نفس العلاقات مع :

$$\hat{p}_y \text{ و } \hat{p}_z$$

ب-استنتاجات:

من أجل كيت كيفي $|\Psi>$, لدينا :

$$<\vec{r}\left|\hat{\vec{R}}\right|\Psi> = \vec{r} <\vec{r}|\Psi>= \vec{r}\,\Psi(\vec{r})$$

$$<\vec{r}|\hat{x}|\Psi> = x <\vec{r}|\Psi> = x\,\Psi(\vec{r})$$

$$<\vec{r}|\hat{y}|\Psi> = y <\vec{r}|\Psi> = y\,\Psi(\vec{r})$$

$$<\vec{r}|\hat{z}|\Psi> = z <\vec{r}|\Psi> = z\,\Psi(\vec{r})$$

$$<\vec{p}|\hat{\vec{p}}|\Psi> = \vec{p} <\vec{p}|\Psi> = \vec{p}\Psi(\vec{p})$$

$$<\vec{p}|\hat{p}_x|\Psi> = p_x <\vec{p}|\Psi> = p_x\Psi(\vec{p})$$

$$<\vec{p}|\hat{p}_y|\Psi> = p_y <\vec{p}|\Psi>= p_y\Psi(\vec{p})$$

$$<\vec{p}|\hat{p}_z|\Psi> = p_z <\vec{p}|\Psi>= p_z\Psi(\vec{p})$$

وإذا كان $F(\hat{\vec{R}})$ تابعا للمؤثر $\hat{\vec{R}}$ و $F(\hat{\vec{P}})$ تابعا للمؤثر $\hat{\vec{P}}$ ، لدينا:

$$<\vec{r}\left|\hat{\vec{R}}\right|\vec{r'}> = \vec{r} <\vec{r}\left|\vec{r'}\right> = \vec{r}\delta\left(\vec{r}\_\vec{r'}\right)$$

$$<\vec{r}|\hat{F}(\vec{R})\left|\vec{r'}\right>= \vec{r} < F(\vec{r})\ \delta(\vec{r}\_\vec{r'})$$

$$<\vec{p}|\hat{\vec{p}}|\vec{p'}> = \vec{p} <\vec{p}|\vec{p'}> = \vec{p}\delta(\vec{p}\_\vec{p'})$$

$$<\vec{p}|\ \vec{F}(\vec{p})|\vec{p'}> = F(\vec{p})\ \delta(\vec{p}\_\vec{p'})$$

ج- متحول فورييه للتابع $\vec{p}\Psi(\vec{p})$.

كنا قد تعرفنا على أن :

$$<\vec{r}|\vec{p}> = (\frac{1}{2\pi\hbar})^{3/2}\ e^{i/\hbar\ \ \vec{p}.\vec{r}}$$

تبسيطا ، نعتبر بعدا واحدا :

$$<x|p_x> = (\frac{1}{2\pi\hbar})^{1/2}\ e^{i/\hbar\ \ p_x.x}$$

نكتب متحول فورييه للتابع :

$$<\wp_x|\Psi> = \Psi(\wp_x).$$

$$\Psi(x) =< x|\Psi> = (\frac{1}{2\pi\hbar})^2 \int e^{i/\hbar\ \wp_x.x}\ \ \Psi(\wp_x)d\wp_x$$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ :x ، نحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x)\ \ = \frac{i}{\hbar}(\frac{1}{2\pi\hbar})^{1/2} \int e^{i/\hbar\ \wp_x.x}\ \ \wp_x\Psi(\wp_x)d\wp_x$$

التي تعني أن متحول فورييه للتابع $\wp_x\Psi(\wp_x)$ هو :

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x)$$

وبالتعميم للأبعاد الثلاث ، يكون متحول فورييه للتابع $\vec{\wp}\Psi(\vec{\wp})$ هو : $-i\hbar\vec{\nabla}\,\Psi(\vec{r})$

أي أننا نستطيع أن نكتب

$$\int <\vec{r}|\vec{\wp}>\ \ \vec{\wp}\Psi(\vec{\wp})\ d^3\wp\ \ = -i\hbar\vec{\nabla}\,\Psi(\vec{r})$$

د- فعل المؤثر $\hat{\vec{P}}$ في التمثيل $\{|\vec{r}>\}$:

نعتبر كيتا كيفيا $|\Psi>$ ، ونبحث عن قيمة الكمية :

$$<\vec{r}|\hat{\vec{p}}|\Psi>$$

بإدخال علاقة الانغلاق على $|\wp>$, نجد :

$$<\vec{r}|\hat{\vec{p}}|\Psi> = \int <\vec{r}|\vec{\wp}><\vec{\wp}|\hat{\vec{p}}|\Psi>\ \ d^3\wp = \int <\vec{r}|\vec{\wp}>\vec{\wp}\Psi(\vec{\wp})d^3\wp$$

حيث يظهر تحويل فورييه لـ $\vec{\wp}\Psi(\vec{\wp})$: الذي سبق ذكره

إذن:

$$<\vec{r}|\hat{\vec{p}}|\Psi> = -i\hbar\ \vec{\nabla}\Psi(\vec{r})$$

كما نستنتج بسهولة قيمة : $<\vec{r}|\hat{p}^2|\Psi>$

$$<\vec{r}|\hat{p}^2|\Psi>\ \ = -\hbar^2\nabla^2\Psi(\vec{r})$$

<u>2- التوابع الخاصة لمؤثر الدفع $\hat{\vec{p}}$ في التمثيل $\{|\vec{r}>\}$:</u>

رأينا سابقا أن معادلة القيم الخاصة لمؤثر الدفع $\hat{\vec{p}}$ تكتب كالتالي :

$$\vec{p}|\emptyset> = \vec{\wp}|\emptyset>$$

حيث $|\emptyset>$ هو الكيت الخاص مع القيمة الخاصة $\vec{\wp}$. وفي التمثيل $\{|\vec{r}>\}$ نحصل على :

$$<\vec{r}|\hat{\vec{p}}|\emptyset>\ \ =\ p<\vec{r}|\emptyset> = p\emptyset(\vec{r})$$

نعلم أن:

$$< \vec{r}|\hat{p}|\emptyset > \ = \ -i\hbar\,\vec{\nabla}\emptyset(\vec{r})$$

ومن ذلك :

$$-i\hbar\,\vec{\nabla}\emptyset(\vec{r}) = \vec{p}\emptyset(\vec{r})$$

التي هي معادلة متجهية . لو افترضنا إمكانية كتابة $\emptyset(\vec{r})$ على الشكل :

$$\emptyset(\vec{r}) = \emptyset_x(x).\emptyset_y(y).\emptyset_z(z)$$

تصير المعادلة المتجهية ، ثلاث معدلات :

$$-i\hbar\frac{d}{dx}\emptyset_x(x) = p_x\emptyset(x)$$

$$-i\hbar\frac{d}{dy}\emptyset_y(y) = p_y\emptyset(y)$$

$$-i\hbar\frac{d}{dz}\emptyset_z(z) = p_z\emptyset(z)$$

التي تقبل الحلول التالية :

$$\emptyset_x(x) = N_x e^{i/\hbar\ p_x\,x}$$

$$\emptyset_y(y) = N_y e^{i/\hbar\ p_y\,y}$$

$$\emptyset_z(z) = N_z e^{i/\hbar\ p_z\,z}$$

ومن ذلك نستنتج :

$$\emptyset(\vec{r}) = N e^{i/\hbar\ \vec{p}.\vec{r}}$$

نحصل على الثابت N باستخدام شرط التنظيم :

$$N = (\frac{1}{2\pi\hbar})^{3/2}$$

فيكون :

$$\emptyset(\vec{r}) = (\frac{1}{2\pi\hbar})^{3/2}\, e^{i/\hbar}\,\vec{p}.\vec{r}$$

$\emptyset(\vec{r})$ تابع خاص للمؤثر $\hat{\vec{P}}$ ، اذن فهو تابع خاص لكل تابع $F(\hat{\vec{p}})$ لـ : $\hat{\vec{p}}$ ، مع القيمة الخاصة $F(\vec{p})$.

القيمة الخاصة $\vec{p}$ مرتبطة بالمتجه الموجي $\vec{k}$ بالعلاقة :

$$\vec{p} = \hbar\,\vec{k}$$

واتجاه المتجه الموجي $\vec{k}$ يعطي دائما اتجاه الانتشار .

3-معادلة شرودينغار المستقلة عن الزمن:

رأينا أن المؤثر الهاميلتوني لجسيم كتلته m واقع تحت الكمون $V(\vec{r})$ ، يكتب كالتالي:

$$H = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{\vec{R}})$$

وإذا كان الكيت $|\Psi >$ كيتا خاصا للهاميلتوني H مع القيمة الخاصة E ، فان معادلة القيم الخاصة تكتب على النحو:

$$H|\Psi > = E|\Psi >$$

أي:

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{\vec{R}})\right]|\Psi > = E|\Psi >$$

وفي التمثيل $\{|\vec{r}>\}$ لدينا :

$$\frac{1}{2m} < \vec{r}\left|\hat{P}^2\right|\Psi > + < \vec{r}\left|V(\hat{\vec{R}})\Psi\right| > = E < \vec{r}|\Psi > = E\ \Psi(\vec{r})$$

رأينا أن :

$$< \vec{r}\left|\hat{P}^2\right|\Psi > = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r})$$

$$< \vec{r}\left|V(\hat{\vec{R}})\Psi\right| >= V(\vec{r})\ \Psi(\vec{r})$$

وبالتالي ، نحصل عن ما يسمى بمعادلة شرودينغار المستقلة عن الزمن:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right]\Psi(\vec{r}) = E\ \Psi(\vec{r})$$

القيم الخاصة E هي الطاقات الخاصة للجملة ، والتوابع الخاصة $\Psi\ (\vec{r})$ هي التوابع الموجية .

إن حل معادلة شرودينغر يعطينا مباشرة الطاقات الخاصة للجملة التي تسمى عادة بسويات الطاقة . قد يكون طيف H متصلا أو منفصلا أو جزئيا متصلا ومنفصلا ، فتكون سويات الطاقة متصلة أو منفصلة أو جزئيا متصلة و منفصلة . في الحالة التي يكون فيها الطيف منفصلا تكون السويات منفصلة والطاقة المكممة .

واضح أن شكل معادلة شرودينغار أو المعادلة الموجية ، يتعلق مباشرة بالهاميلتوني H ، وهذا ما يفسر الدور الأساسي الذي يلعبه المؤثرH ، في كل الأدلة الرياضية للميكانيك الكوانتي .

مربع طويلة التابع الموجي $\Psi(\vec{r})$ ، يعطي احتمال العثور على الجسيم في النقطة $\vec{r}$ ، لذلك نقول أن $\Psi(\vec{r})$ يعطي توزيع الاحتمال لمختلف قيم الموضع قد نهتم بتوزيع الاحتمال لمختلف قيم الدفع ، فنبحث عن التابع $\Psi(\vec{p})$ ، الذي نحصل عليه بواسطة استعمال تحويل فورييه :

$$\Psi(\vec{p}) = (\frac{1}{2\pi\hbar})^{3/2} \int e^{-i/\hbar\ \vec{p}.\vec{r}}\, \Psi(\vec{r}) d^3 r$$

مثال: حالة جسيم حر .

في حالة الجسيم الحر يكون الكمون معدوما :

$$V(\vec{r}) = 0$$

والهاميلتوني هو :

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

معادلة القيم الخاصة لـ : H هي :

$$H|\Psi> = E|\Psi>$$

وفي التمثيل $\{|r>\}$, لدينا :

$$<\vec{r}|H|\Psi> = E <\vec{r}|\Psi> = E\,\Psi(\vec{r})$$

الذي نستطيع كتابته على النحو التالي :

$$\frac{1}{2m} < r|p^2|\Psi> = E\,\Psi(\vec{r})$$

من ذلك نستنتج التابع الخاص $\Psi(\vec{r}) = (\frac{1}{2\pi\hbar})^{3/2} e^{i/\hbar\ \vec{p}.\vec{r}}$ الذي هو نفس التابع الخاص لمؤثر الدفع $\vec{P}$, والقيمة الخاصة $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ المنحلة من الرتبة .2. ذلك أن كل قيمة خاصة E، يقابلها تابعان خاصان :

$$\theta_+(\vec{r}) = (\frac{1}{2\pi\hbar})^{3/2}\ e^{i/\hbar\ \vec{p}.\vec{r}}$$

$$\theta_-(\vec{r}) = (\frac{1}{2\pi\hbar})^{3/2}\ e^{-i/\hbar\ \vec{p}.\vec{r}}$$

لاحظ أن لا يوجد أي شرط على القيمة الخاصة :

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

فمن الممكن لـ : E أخذ أية قيمة كانت بين 0 و ∞ ، إذن طيف H في حالة الجسيم الحر طيف متصل .

الفصـــــــل الخامس

الجمل الشهيرة

I- المهتز التوافقي:

النظرية الكلاسيكية : حسب النظرية الكلاسيكية ، فإن المهتز التوافقي هو جسم كتلته m يتحرك وفق االمعادلة التالية :

$$F = -m\omega^2 x(t)$$

فهي تخضع لمعادلة الحركة من الشكل :

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

إذن حل هذه المعادلة الرياضية سيكون

$$x(t) = a\cos(\omega t)$$

هذا الحل يصف حركة اهتزازية توافقية ترددها الزاوي ω و سعتها a

ترتبط مع طاقة الوضع مع القوة بالمعادلة التالية :

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

و منه باستخدام المعادلة: $F = -m\omega^2 x(t)$ و اجراء التكامل نحصل على :

$$V(x) = \frac{1}{2}\, m\omega^2 x^2$$

و طاقة الاهتزاز هي طاقة الجسيم المهتز عندما يكون عند اقصى مسافة أي:

$$V(x) = \frac{1}{2}\, m\omega^2 a^2$$

II- النظرية الكمية:

نظرا لأن الحركة الكلاسيكية مقيدة لجميع الطاقات فإن الاطياف الكمية الكلية للطاقات تظهر بصورة متقطعة.

نكتب الهاميلتوني الجملة كما يلي:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

و عند استخدام تمثيل شرودينجر لبعد واحد تأخذ المعادلة الاخير الصورة التالية :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{m\omega}{2}x^2\right)\emptyset_n(x)=E_nU_n(x)$$

بضرب طرفي المعادلة في $2/\hbar\omega$ نجد ان:

$$\left(-\frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)\emptyset_n(x)=\frac{2E_n}{\hbar\omega}U_n(x)$$

و بوضع

$$y=\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2}x$$

و

$$\varepsilon_n=E_n/\hbar\omega$$

فتصبح المعادلة على الوضع المبسط:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-y^2\right)\emptyset_n(y)=2\varepsilon_n\emptyset_n(y)$$

و هي معادلة تفاضلية يمكن حلها باستخدام طريقة التحليل الى عوامل بسيطة كالأتي :

$$(A+B)(A-B)=(A^2-B^2-1)$$

فتصبح المعادلة التفاضلية كالأتي :

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}-y\right)\emptyset_n(y)=\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-y^2-1\right)\emptyset_n(y)$$

و بعد ترتيب المعادلة تصبح كالأتي:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}-y\right)\emptyset_n(y)=(-2\varepsilon_n+1)\emptyset_n(y)$$

و بضرب طرفي المعادلة فــي $\left(\frac{\partial}{\partial y}-y\right)$ نجد:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}-y\right)\emptyset_n(y)=(-2\varepsilon_n-1)\emptyset_n(y)\left(\frac{\partial}{\partial y}-y\right)$$

و منه يكون عندنا احد الطرفين اما يساوي الى :

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-y\right)\emptyset_n(y)=0$$

او يكون

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-y\right)\emptyset_n(y)=\emptyset_{n+1}(y)$$

و منه

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}-y\right)\emptyset_{n+1}(y)=(-2(\varepsilon_n+1)+1)\emptyset_{n+1}(y)$$

حل هذه المعادلة هو من الشكل :

$$\emptyset_n(y)=e^{\left(\frac{1}{2}\right)y^2}$$

من اجل القيم الكبيرة لـ يتباعد هذا الحل، و بالتالي ليس هذا هو الحل المرغوب فيه.

عند أي حالة لـ $\emptyset_n(y)$ ينتمي إليها القيمة المناسبة ε_n تصبح من الممكن اجاد قيمة اخرى لـ $\emptyset_{n+1}(y)$ ينتمي إليها القيمة المناسبة ε_{n+1}.

و بضرب طرفي المعادلة فــي $\left(\frac{\partial}{\partial y}+y\right)$ اتباع نفس المنوال السابق نجد ان:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}-y\right)\emptyset_{n-1}(y)=(-2(\varepsilon_n-1)-1)\emptyset_{n-1}(y)$$

و هي نفس المعادلة فقط تحقق العلاقة:

$$\varepsilon_n-1=\varepsilon_{n-1}$$

ففي هذا الوضع دالة الحالة الارضية لابد ان تحقق المعادلة

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+y\right)\emptyset_0(y)=0$$

و هذه المعادلة تمنحنا بالدالة القيمة الوسطية للحالة الارضية لتصبح مساوية الى :

$$\emptyset_0(y)=e^{-\left(\frac{1}{2}\right)y^2}$$

و معادلة طاقة الحالة الارضية

$$2\varepsilon_0-1=0$$

إذن معادلة قيم الطاقة تساوي :

من كل هذا نستخلص العلاقة التالية:

$$E_n=\left(\frac{1}{2}+n\right)\hbar\omega \qquad n=0,1,2,\dots\dots\dots$$

أي ان قيم الطاقة تكون متقطعة ، هذا الاخير يتفق مع تفسير بلانك لكيفية تفسير تفاعل الاشعاع مع المادة ، بشرط اعتبار المادة عبارة تذبذبات او مهتزات توافقية ، و كل مهتز يبعث او يمتص اشعاع تردده مساوي لتردد المهتز التوافقي.

تطبيـــــــق

تطبيـــــــق على نموذج ذرة الهيدروجين

1- النموذج النصف كمومي لبور «Bohr»

*هناك قوة كولومب $\vec{F_c} = -\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}$

*هناك القوة الطاردة المركزية

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}_n + \vec{a}_r)$$

حركة دائرية منتظمة : $\vec{a_t} = \vec{o}$

$$F = ma_n = m\frac{V^2}{r}$$

$$q_1 = e^- \qquad\qquad q_2 = ze^2$$

الإلكترون مستقر هذا يعني أن

$$\vec{F} + \vec{F}_e = 0 \rightarrow \frac{kZe^2}{r^2} = m\frac{V^2}{r}$$

$$V^2 = \frac{KZe^2}{mr} \qquad\qquad K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

حساب الطاقة الكلية للا e^-

$$E = E_p + E_T \qquad\qquad E_T = \frac{1}{2}mV^2$$

$$E_T = \frac{1}{2}m(\frac{KZe^2}{mr})$$

$$E_T = \frac{KZe^2}{2r}$$

الطاقة الكامنة

$$\mathrm{E_p} = -\int_{\infty}^{1} \vec{\mathrm{F}}.\vec{\mathrm{d}}_{\mathrm{r}}$$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p \rightarrow F = -\frac{dE_P}{dr}$$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_P \rightarrow F = -\frac{dE_P}{dr}$$

$$dE_p = -Fdr$$

$$\int E_p = -\int_{\infty}^{r} Fdr$$

$$E_p = -\int_{\infty}^{r} \frac{KZe^2}{r^2}\, dr$$

$$E_P = KZe^2 \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2}$$

$$E_p = -\frac{KZe^2}{r}$$

$$E = E_T + E_P$$

$$E = \frac{KZe^2}{2r} - \frac{KZe^2}{r}$$

$$E = -\frac{KZe^2}{2r}$$

هنا في هذه الحالة الطاقة الكلية للالكترون دالة مستمرة بدلالة r لكن حسب مسلمات بور فإن العزم الحركي مكمم أي أنه لا يأخذ إلا قيما بعينها وهي أعداد صحيحة من مضاعفات $\hbar$ ثابت بلانك المختصر .

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{P} \qquad (\overrightarrow{P} = m\vec{V})$$

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \overrightarrow{mV}$$

إذا كان $(\overrightarrow{r} \perp \vec{V})$ فإن :

$$L = rmV = n\hbar = n\frac{h}{2\pi}$$

$$rmV = n\frac{h}{2\pi}$$

$$r^2m^2V^2 = n^2\frac{h^2}{4\pi^2}$$

$$r^2m^2 = \left(\frac{KZe^2}{mr}\right) = n^2 \frac{h^2}{4\pi^2}$$

$$rmKZe^2 = n^2 \frac{h^2}{4\pi^2}$$

$$\boxed{= \frac{h^2}{4\pi^2 m\, KZe^2} \cdot n^2}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{4\pi^2 mKZe^2}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$E = -\frac{4\pi^2 mK^2Z^2e^4}{2h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$\boxed{E = -\frac{2\pi^2 mK^2Z^2e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2}}$$

ذرة الهيدروجين Z= 1

$$\boxed{E = -13{,}6 . \frac{1}{n^2} eV}$$

تتوقف الطاقة الكلية على القيمة n

نقول عن الذرة أنها في الحالة الأساسية عندما $n = 1$

$n > 1$ الذرة في حالة إثارة .

2- تفسير طيف ذرة الهيدروجين :

ذرة الهيدروجين أبسط ذرة وذلك لأنها تحتوي على إلكترون واحد في مدارها. ولهذا السبب تصبح معادلة شرودنجر معادلة جسم واحد وذلك بعد فصل حركة مركز الكتلة، وسوف نتعامل مع ذرات مشابهة للهيدروجين، أي أن الذرات التي تحتوي على إلكترون واحد فقط.

*حسب مسلمات بور كل انتقال من سوية طاقة إلى أخرى يوافقه امتصاص أو إشعاع فوتون الشكل 8. و تعطى طاقته كما يلي :

$$\Delta E = E_p - E_n = h\upsilon_{np}$$

$$h\upsilon_{np} = \frac{2\pi mK^2Z^2e^4}{h^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{P^2}\right)$$

$$\upsilon_{np} = +\frac{2\pi^2 mK^2Z^2e^4}{h^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{P^2}\right)$$

لدينا :

$$\upsilon_{np} = \frac{c}{\lambda}$$

العدد الموجي :

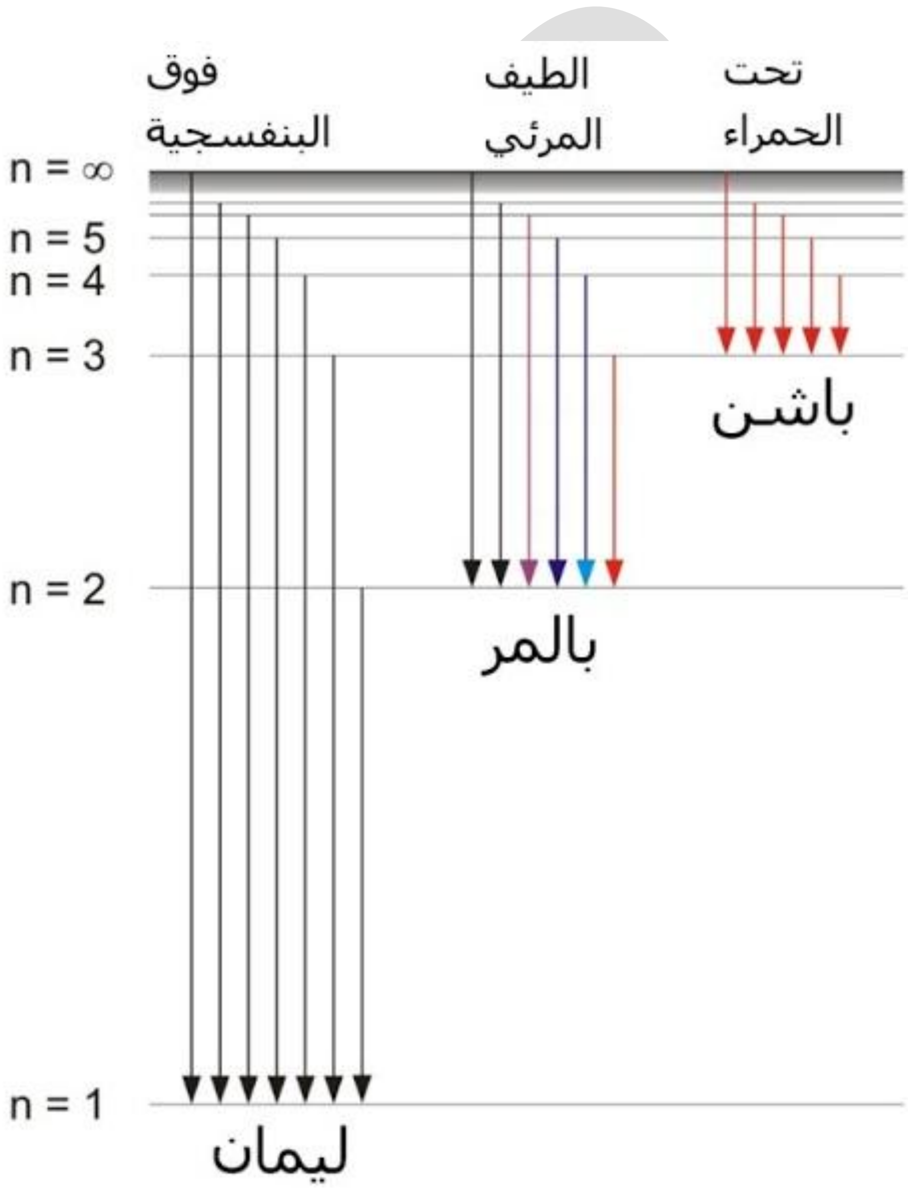
$$\bar{\upsilon} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{2\pi^2 m_e K^2 Z^2 e^4}{h^3 c}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{P^2}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty Z^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{P^2}\right)$$

$$R_\infty = \frac{2\pi^2 m_e K^2 e^4}{h^3 c}$$

R_∞ هو ثابت ريدبارج.



الشكل 8: سلاسل الطيف لذرة الهيدروجين[1].

[1] منقول عن صفحة ويكبيديا

المراجع المعتمدة في هذه المطبوعة

1/- مقدمة في ميكانيكا الكم ، بي. تي. ماثيور، د. ترجمة اسامة زيد ابرهيم ناجي ، الدار الدولية للنشر و التوزيع- القاهرة.

2/- مبادئ ميكانيكا الكم، بول ديراك ، ترجمة د. محمد احمد عنقر و د. عبد الشافي فهمي عبادة ، دار النشر- كلمة- 2010

3/- كتاب مقدمة في ميكانيكا الكم ، رشوان محمود إبراهيم ، 2009

4/- الميكانيكا الكوانتية ، ا. سوكولوف ، أ. تيرنوف ، ف. جوكوفسكي ، ترجمة حسن سلمان ، دار النشر - مير- موسكو 1986.

5/- مطبوعة دروس في ميكانيك الكمي1 ، ا.د. يزيد دلندة ، قسم الفيزياء ، كلية علوم المادة ، جامعة باتنة.

6/- كتاب مبادئ الميكانيك الكوانتي، الجزء الاول ، ا. د. بوسنة احمد ، دوان المطبوعات الجامعية 1985

7/- Introduction à la mécanique quantique Habib Bouchriha , Cours et application , 2002 Centre de Publication Universitaire

8/- Mécanique quantique; Jacques Weyers; Département de Physique, Faculté des Sciences, Université catholique de Louvain 2006-2007

9/- Mécanique quantique Christophe Texier; Dunod 2014.

10/- Historical Development of Quantum Mechanics
Auteurs : Helmut Rechenberg, Jagdish Mehra

Sitographies

1/- محاضرات ميكانيكا الكم ، د. محمد احمد آلجلالي
https://drive.google.com/file/d/1O6gGtmP2HVs5z70WvHLA4Z57rufSk8Ih/view

2/- https://docs.google.com/viewerng/viewer?url=https://books-library.online/files/books-library.online-12301601Mj8W9.pdf&hl=ar