تعليمية الرياضيات 2.

دروس عبر الخط لفائدة
طلبة السنة خامسة
رياضيات في تعليمية
الرياضيات 2.

إعداد الأستاذ عباسي
أحمد

السداسي الأول

1. مراجعة لبعض المفاهيم السابقة

مفهوم التعليم: يشمل كل ما يقوم به المعلّم من تدابير وإجراءات تحفّز المتعلّم على الانخراط في نشاط بحثي محبك يقوده إلى اكتساب مورد جديد (مفهوم، مهارة، منهجية، قيمة سلوكية أو خاصة بالمادة) بشكل تفاعلي (وقد يكون تشاركيا).

مفهوم التعلّم: يشمل كل ما يقوم به المتعلّم من أنشطة ظاهرة وباطنة (ذهنية) تعبّر عن تفاعله مع ما يُقترح عليه من وضعيات قصد إنجاز ما تتضمنه من مهمّات اعتمادا على ما يتوفر لديه من موارد مختلفة بأكبر قدر من الاستقلالية.

ملاحظة:

التعليم عبارة عن وساطة المعلم بين المتعلم والمعرفة سواء في النماذج التعليمية التقليدية أو الحديثة؛ لكن بأدوار مختلفة:

- في النماذج التقليدية: دور الوساطة هو النقل
  - نقل المعرفة إلى المتعلم في النموذج الموسوعي؛
  - ونقل المتعلّم إلى المعرفة في النموذج السلوكي.
- أما في النماذج الحديثة: دور الوساطة هو إحداث التفاعل

تعليمية الرياضيات.

- هي العلم الذي يدرس، في مجال معين، ظواهر التعليم، وشروط انتقال المعرفة المناسبة، وظروف اكتسابها من قبل المتعلم.
- تعليمية الرياضيات هي دراسة عمليات نقل واكتساب المحتويات المختلفة لهذا العلم، والتي تقترح كتابة وتفسير الظواهر المربوطة بالعلاقة بين التعليم والتعلم. ولا تختصر في البحث عن الطريقة الجيدة لتدريس فكرة معطاة. (REGINE DOUADY)
- هي العلم الذي يهتم بإنتاج وتوصيل المعرفة الرياضية في هذا الإنتاج والتوصيل لدينا معرفة محددة. تعليمية الرياضيات يدرس كيف يتم خلق المعرفة، وتوصيلها واستخدامها لتلبية احتياجات المتعلمين وسط مجتمعهم. (GUY BROUSSEAU)

موضوع التعليمية

- دراسة عملية نقل واكتساب المعرفة الرياضية في وضعيات التعلم
- التنظير للظواهر المتعلقة بحالات التعليم والتعلم

- التصرف في نظام التعليم لتطوير ظروف التعليم والتعلم وتحسين وأدائها.

1 – المثلث التعليمي:

تمتاز الوضعية التعليمية بكونها وضعية مثلثة تجمع بين ثلاثة أقطاب غير متكافئة هي:

التلميذ والمدرس والمعرفة.

وتهتم تعليمية المادة بتحليل كل قطب من هذه الأقطاب الثلاثة على حده، كما تهتم بدراسة التفاعلات التي تربط كل قطب من هذه الأقطاب بالقطبين الآخرين.

- علاقة التلميذ بالمعرفة، وتفرز ثلاث قضايا على الأقل:

– قضية التملك الاصطناعي للمعرفة من طرف المتعلم (نظريات التعلم وخاصة البنائية).

– قضية العوائق التعليمية التي تحول دون امتلاك الطفل للمعرفة العلمية المقدمة له في القسم.

– قضية التصورات وضرورة الوقوف عليها ومعالجتها لتسهيل عمليات امتلاك المعرفة من طرف المتعلمين.

- علاقة المعلم بالمعرفة، وتفرز بالأساس قضية تحليل المضمون المعرفي من طرف المدرس وما ينتج عنها من قضايا النقل الديداكتيكي.

- علاقة التلميذ والمدرس، وتفرز بدورها ثلاث قضايا على الأقل:

– قضية العلاقات التربوية.

– قضية العقد التعليمي الذي يربط بين كل من التلميذ والمعلم.

– قضية التصورات التي يحملها المدرس حول مختلف المواد المعرفية التي يتعامل معها في إطار الوضعية التربوية.

2 – مفهوم العقد الديداكتيكي

" مجموع العلاقات التي تحدد بصفة صريحة في بعض الحالات وبصفة ضمنية في اغلبها ما هو مطلوب من كل طرف (المدرس والمتعلم) ان يحققه خلال حصة تعليمية معينة "، ونظام الإلزام هذا هو بمثابة عقد بينهما، ومعنى هذا أن عنصر المفاجأة أو التشويق أصبح أمرا غير مرغوب فيه حيثما يتم تحديد الأهداف وإشعار المتعلم بها والتعاقد عليها بين طرفي العملية. إن الصيغة الضمنية للعقد الديداكتيكي تسود حيثما التزم الأطراف بالمسؤوليات المحددة، وحالما يشذ التعليم عن مجراه يبرز هذا العقد بصيغة صريحة ويلزم العودة إلى تعديل مسار هذا النظام.

3 – مفهوم التمثلات

التمثل في اللغة العربية من مثل له شيئا، أي صوره، حتى كأنه ينظر إليه.وامتثله، أي تصوره، ومثلت له تمثيلا، إذا صورت له مثاله بكتابة وغيرها، وتمثيل الشيء بالشيء تشبيه به. فالتمثيل والتمثل إذن متقاربان، وهما يشتركان في أمرين: حضور صورة الشيء في الذهن، والآخر قيم الشيء مقام الشيء.

وعموما فالتمثل عبارة عن صيغة من المعارف الداخلية التي يعمل المتعلم على تشغيلها ضمن وضعية معينة عندما يكون أمام موضوع أو ذات، مطلوب منه أن يقاربه ويدمجه. والمتعلم يعمل عن طريق التمثل على كنينة المعرفة على مستوى ذهنه بعد أن كانت محددة ضمن سياق واقعي مادي، بمعنى أن يحول الصور المادية إلى قوالب معرفية قصد إعادة تشكيل الواقع من جديد. ولكل متعلم جهازه التمثيلي الخاص حسب طاقته الاستيعابية وقدرته على التجريد. وينصب عمل المدرس في هذا الإطار على ثلاث مستويات: مستوى فهم التمثلات، مستوى ضبط مصادرها، ومستوى استثمارها وتوظيفها في توجيه التعلم.

4 – النقل / التحويل الديداكتيكي

هو مجموعة التحولات التي تطرأ على معرفة معينة في مجالها الصرف من أجل تحويلها إلى معرفة تعليمية قابلة للتدريس.

– استعمل مفهوم النقل / التحويل الديداكتيكي لأول مرة في ديداكتيك الرياضيات من طرف Yves Chevallard، ويعني تحويل المعرفة من مجالها العالم والصرف إلى مجال آخر لتكون قابلة للتدريس.

فالنقل الديداكتيكي هو مجموعة التحولات التي تطرأ على معرفة معينة في مجالها الصرف من أجل تحويلها إلى معرفة تعليمية قابلة للتدريس.

يمكن أن نميز ثلاث محطات تمر بها المعرفة أثناء عملية التحويل التعليمي.

1– معرفة العالم (معرفة مرجعية).

2– معرفة قابلة للتعليم (البرامج المدرسية. مذكرة الأستاذ).

3– معرفة متعلمة (معرفة التلميذ).

– التحويل التعليمي الخارجي:

هناك مسافة بين معرفة العالم والمعرفة القابلة للتعليم. وهذه المسافة ليست متعلقة فقط بسن الطفل ونموه العقلي، الذي يقوم بها المكلفون بالتفكير في محتويات التعليم والمعدون للبرامج المدرسية من أساتذة جامعيين ومهتمين بمشكلات التعليم، ومؤلفي كتب ...الخ، فيحدثون غربلة وتصفية للمعرفة، باختيار ما يناسب منها لمرحلة معينة من التعليم.

وحتى تنتقل المعرفة في هذه المرحلة من معرفة العالم إلى معرفة قابلة للتعليم يجب أن تخضع إلى:

1- تقسيم المعرفة إلى ميادين معرفية. La Désyncrétisation

2- الفصل بين المعرفة والشخص. La Dépersonalisation

3- البرمجة La Programmabilit

4- إعلان المعرفة. La Publicité

5- الضبط الاجتماعي للمعرفة. La Contrôle social

1- نظرية الوضعيات التعلمية (01 محاضرة)

1. الوضعية التعلمية.

هي وضعية مبنية انطلاقا من حاجيات تعلّم التلميذ على ضوء المعارف المستهدفة(وفق مقتضيات المنهاج)وتمثل كلّ ما يقوم به التلميذ لغرض تحقيق التعلم.

- هي مجموعة أنشطة تهيئ المتعلم لبناء تعلمات جديدة) معارف – أداءآت – مواقف وقيم)عن طريق تعبئة موارده وقدراته

للوصول للأهداف المسطرة. هي وضعية تمثل:

1. وضعية انطلاق: ينطلق منها المتعلم لإنتاج تعلمات جديدة
2. وضعية اكتشاف: لاكتساب معارف جديدة

– هي جملة من المهام، داخل سياق، لها غرض تعلمي ولها معنى بالنسبة للمتعلم، يُسخر فيها المتعلم قدراته وموارده ليبني من المفهوم القديم مفهومـــا جديد.

ملاحظة: إذ كان في أحد المهام السابقة عائق أو مشكل تسمى عندئذ بوضعية المشكل.

2. الوضعية المشكل.

يشتق معنى المشكل من المقصد المراد تحقيقه، والحاجز المانع لتحقيق القصد، والأهمية المعطاة لهذا المشكل. ويمتاز المشكل بثلاث وظائف أساسية. فهو معيار للتعلم يمكن التلميذ من استيعاب مفهوم ما. محرك للتعلم يسمح بمعالجة وضعيات معيشة ويمنح التلاميذ دافعية أثناء معالجتهم النشاطات الوظيفية. وسيلة للتعلم يسمح بتجنيد التلميذ وتسليحه بعزم في حل يسوقه إلى تطوير وسائله الذهنية الضرورية.

يهدف تدريس الرياضيات عموما وتعلم حل المشكلات خصوصا إلى إكساب التلاميذ أساليب تفكير سليمة واستعمال الاستدلال. فالتلميذ يفكر ليحل مشكلا ما، ويبرهن ليقنع ويقتنع بصحة حله.

يتأثر حل مشكل بعدد من العوامل المتنوعة، بعضها يتعلق بطبيعة المشكل ذاته، كسهولته، صعوبته، وضوحه أو مدى توافر المعلومات حوله، وبعضها يتعلق بالمتعلم ذاته، كخبراته السابقة، قدراته، أساليب تفكيره، دافعيته، مدى ألفته بطبيعة المشكل أو مدى قدرته على المثابرة وتحمل الغموض...الخ. إن تفاعل هذين النوعين من العوامل يؤثر في الاستراتيجيات التي يمارسها المتعلم في حل المشكل الذي يواجهه، لذا يجب أخذها في الاعتبار عند التدريب على حل المشكل في الأوضاع المدرسية العادية.

يمتاز التعلم القائم على حل المشكلات بخصائص جعلت منه العمود الفقري لجل البيداغوجيات التعليمية الحديثة، فهو يثير اهتمام المتعلم ويمكنه من اكتساب مهارات عقلية مثل الملاحظة، وضع الفروض، تصميم وإجراء التجارب والوصول إلى استنتاجات وتعميمات. كما يستخدم هذا النمط من التعلم في الكثير من المواقف خارج المدرسة، بذلك يمكن أن يستفيد المتعلم مما سبق تعلمه في المدرسة وتطبيقه في المجالات المختلفة في الحياة.

تأتي أهمية حل المشكلات في الرياضيات المدرسية من كونها مزدوجة الأدوار. فهي أداة تعليمية وتعلمية تجيب على تساؤلات وتطرح أخرى، أي أنها تغلق مسائل وتفتح أخرى أوسع، وهي من جهة أخرى مقصد، إذ يساعد الفرد على الوصول إلى إيجاد مخارج لهمومه الحياتية. يلعب المشكل الرياضياتي دورًا محوريا في تعلم الرياضيات. فبواسطته يلمس المتعلم منطقية الرياضيات ويتطلع على جوانبها التطبيقية. إنه منطلق لبناء المعرفة الرياضياتية ومجال لاستثمارها وإثرائها. يعد بذلك حافزاً ومثيراً للتعلم، ومعالجته وحله بكفاءة يشعر المتعلمين بالغاية الحقيقية لتعلم الرياضيات.

خصائصها:

1. تُنظّم وضعية مشكل حول تخطي عائق من طرف القسم، يكون هذا العائق مشخصا مسبقا بكلّ دقة.
2. تكون الوضعية ملموسة وذات دلالة حتى تسمح للتلميذ بوضع فرضيات وتخمينات. فالأمر إذن، لا يتعلق بدراسة مثال توضيحي كما هو الحال بالنسبة إلى الوضعيات التقليدية.
3. يدرك التلاميذ الوضعية المقترحة كتحد حقيقي ينبغي رفعه بحيث يكون باستطاعتهم الخوض فيها ويعتبر ذلك شرطا أساسيا لتبني المشكل وبذل الجهد.

4. لا يملك التلاميذ في البداية وسائل الحل المقصود نظرا إلى العائق الموجود والمطلوب اجتيازه للوصول إلى هذا الحل.

5. تتضمن الوضعية مقاومة (صعوبة) كافية تجعل التلميذ يستثمر معارفه المكتسبة وكذا تصوراته بشكل تؤدي به هذه الوضعية إلى الشك في هذه المعارف والتصورات ومن ثمة اقتراح أفكار جديدة.

6. ينبغي ألا تكون الوضعية تعجيزية باعتبارها ليست إشكالية.

7. إن استباق النتائج والتعبير الجماعي عنها يكونان قبل البحث الفعلي عن الحل.

8. إن العمل على وضعية مشكل يعتمد الحوار العلمي داخل القسم والذي يشجع التنازعات المعرفية –الاجتماعية الكامنة.

9. إن التصديق عن حل الوضعية ينبثق عن طبيعة الوضعية وهيكلتها ولا يتم من طرف خارجي كالمعلم مثلا.

10. يمثل العرض الجماعي للسيرورات المتبعة مناسبة لإعادة التفكير بشكل يساعد التلاميذ على الوعي باستراتيجياتهم وتثبيتها في شكل إجراءات قابلة للتجنيد في وضعيات جديدة (إعادة استثمار).

اعتمادا على وضعية التعلم، قد يكون لنفس المشكلة وظائف مختلفة

بـحـث		تـعـلـم	
مشاكل مفتوحة	**مشاكل إعادة الاستثمار والتحويل**	**مشاكل تطبيقية مباشرة**	**الوضعية المشكلة**
تطوير قدرات البحث: حلول مختلفة، لا يوجد حل حل خبير غير معروف لدى التلاميذ. قدرات تفكيرية عالية	مشكلة معقدة باستخدام معارف متعددة بنيت في سياقات مختلفة. حصص معالجة	تدريب لإتقان معنى المعرفة الجديدة. حصص معالجة حصة تقييم	بناء معرفة جديدة أو اكتشاف جانب جديد من المعرفة السابقة

2- الهدف العائق

مفهوم العائق .**العائق** هو الحاجز أو العقبة والمانع.

إن **العوائق** الإبستمولوجية، بحسب باشلار، هي صيغة للتعبير عن مشكلة المعرفة العلمية في حالات معينة هي حالات تَعَطُّلها أو توقفها، وهذه الصيغة ليست خارجة عن العلم، بل هي داخلية، إذ إن العائق مكون من مكونات المعرفة العلمية ومنبثق من صميمها.

وفي حقل البيداغوجيا، يراد **بالعائق** كل ما يساهم في التعثر، ويحول دون الوصول إلى الهدف لتحقيق الغايات وتوفير أسباب النجاح.

إن **العائق**: -**مقاومة**، وفقدان للتوازن وتصدع.

- صعوبة يصادفها المتعلم خلال مساره التعلمي، وللعائق البيداغوجي مظهران:

✓ **مظهر إيجابي**: عندما يتخذ صيغة تحدّ أو عدم توازن بسيط مثير ونافع وضروري، لأنه يساعد المتعلم على تحقيق تعلمه. لذا يتوجب على المدرس أن ينتقي الصعوبات بطريقة تتيح للمتعلم أن يعاملها كتحديات ينبغي تجاوزها، مما يجعله يبذل جهودا إيجابية لإبداع الحلول المناسبة. فالسيكولوجية المعاصرة تعتبر **العائق** البيداغوجي عامل تحفيز يمكن أن يساعد على إحداث تغير دماغي ونفسي لدى الفرد ويؤدي به إلى إحداث طفرات وتخطي الحواجز. وذلك بتجاوز الأوهام والتخوفات.

✓ **مظهر سلبي**: عندما يدرك من طرف المتعلم كحاجز، أي كصعوبة يمكنها أن تعطل أو تحد من وتيرته. مما يؤدي إلى اللامبالاة أو الفشل المتكرر أو اضطرابات في التعلم. وينظر ابستمولوجيا إلى **العائق** على أنه حاجز أو وضعية مشكلة تقف أمام الاستفادة من عملية التعلم، مما يتسبب تربويا في التعثر الدراسي.

2- أنواع عوائق التعلم

يمكن أن نميز بين أنواع كثيرة من **العوائق** نقترح منها ما يلي:

أ-العوائق ذات الأصل الانطولوجي.

تسمى كذلك **بالعوائق** العضوية والنمائية أو السيكوعضوية. وتظهر على المستويات العقلية والوجدانية العاطفية والنفسية الحركية. ومن المؤشرات الدالة عليها صعوبة الاستدلال والتعميم والبرهنة والحجاج. وكذلك الفشل في القيام ببعض المهارات العقلية والاستراتيجيات المعرفية. وتعزى هذه **العوائق** إلى اضطراب أو خلل في وظيفة الدماغ أو الجهاز العصبي، أو إلى تأخر في النمو العقلي للطفل. كما يتمظهر هذا النوع من العوائق في تمثلات المتعلم للمعرفة والدرس؛ فقد يتعثر تعلمه بسبب مواقفه السلبية من المدرسة أو المادة الدراسية أو معاملة المدرس له، كأن يقمعه أو يشهر به أو يرفض مشاركته لكونه يخطئ الإجابة كثيرا، أو لا يستطيع أن يجيد التعبير شفويا أو كتابيا.

ب-العوائق الديداكتيكية.

تنتج هذه **العوائق** عن غموض في الوسائل الديداكتيكية. الشيء الذي يؤدي إلى غموض في المفاهيم وطرائق التدريس والمحتويات و**الوسائل التعليمية** والتقويم. وليس **العائق** هنا نقصا في المعرفة، بل إنه عبارة عن معارف

خاطئة أو غير مكتملة، إنه معرفة تتألف من موضوعات وعلاقات وطرائق وتوقعات، وبديهيات ونتائج تم نسيانها وتشعبات غير متوقعة إنه أمام أي إقصاء .Brousseau.G

.

ج-العوائق ذات المنشأ الديداكتيكي

العوائق ذات الأصل الإبستيمولوجي. حسب" باشلار"هو التمثلات التي تترسخ في ذهن المتعلم على شكل أفكار مسبقة، التي تم اكتسابها من خلال التجارب المباشرة المرتبطة بالمجال الثقافي والاجتماعي والتي تكون حمولة معرفية تضمر وتقاوم اكتساب المعرفة الجديدة.

بكيفية بريئة، بل من خلال مواقفه الخاصة ورأسماله المعرفي السابق. وينبغي، في هذه الحالة، توجيه المتعلم إلى تنمية هذا الرصيد وتقريبه من الحقيقة العلمية وتوجيهه إلى تغيير نظرته إلى الواقع وبناء خطاطة جديدة مغايرة تماما لما اكتسبه من تجاربه الأولى وقناعاته السابقة.

- **عائق التجربة الأولى:** إن التجربة الأولى ضرورية في المنهج العلمي. كما أنها ضرورية في بناء الكفايات واكتسابها، ولكنها تتضمن أحيانا بعض العوائق التي تجعل الفرد أو المتعلم غير قادر على إدراك الحقيقة. مثال ذلك حركة الشمس الظاهرة التي **تعيق** تعلم دوران الأرض. إن المعرفة العلمية تستثمر هذه التجربة الأولى وتعمل على عقلنتها ووضعها في الشكل المناسب. ويربط باشلار بين عائق التجربة الأولى والتحليل النفسي، وخصوصا مفهوم اللاشعور عند فرويد ويونغ، إذ أن المتعلم يتعامل لأول مرة داخل المدرسة مع مفاهيم جديدة، لكن ليس
- **عائق التعميم.** إن التعميم تعبير عن مستوى راق من مستويات النمو الذهني؛ وبالتالي فهو إيجابي وضروري لبناء المعرفة العلمية إذا كان تعميما صادرا من وعي وثقافة علمية. فقولنا بأن الأجسام كلها تسقط في الفراغ بنفس السرعة، تعميم علمي مبني على خطوات محكمة، أما قولنا بأن الأجسام كلها تسقط، فهو قول تعميمي غير علمي لانه لا يستجيب لضرورة علمية بقدر ما يستجيب لمتعة عقلية (Bachelard G).
- **العائق اللغوي أو اللفظي.** L'obstacle linguistique هو **العائق** المتمثل في اختزال الشروح والتفاسير في لفظة أو جملة أو صورة واحدة. أمثلة: تعمل الكلية كمصفاة، ويعمل القلب كمضخة، وتعمل المعدة كماكينة أو طاحونة.
- **العائق الجوهري أو عائق المادة:** إنه **عائق** متعدد الأشكال والوجوه كباقي العوائق. يتكون من الحدس وبعض الانطباعات المتفرقة والسطحية (Bachelard) مثال: الصوف ساخن، الرخام بارد، الثوب الأبيض شاخن والثوب الأسود بارد.
- **العائق الإحيائي أو الإحيائية L'obstacle animiste ou animisme.** يتمثل بحسب باشلار، في تعميم معارف بيولوجية أو إضفاء الصفة الإحيائية أو صفة الحياة على بعض الكائنات. وقد لاحظ بياجي أن الطفل

في المراحل قبل المنطقية يضفي الحياة على الجبل أو المطر أو السيارة. مثال: الصدأ مرض يتعرض له الحديد فيفقد المغناطيس بذلك خاصيته المغناطيسية، وقد يسترجع قواه بإزالة هذا الصدأ) .

الهدف العائق:

صياغة الهدف بناءا على طبيعة العوائق كمرجع أساسي

من الأهداف العوائق إلى وضعيات التعلـم

نموذج Martinand لأجرأة الهدف العائق:

حتى لا يبقى مفهوم الهدف العائق حبرا على ورق، اقترح Martinand نموذجا لإجرائه في الخطوات التالية:

- تحديد تمثل تكون نسبة تردده مرتفعة لدى المتعلمين.
- تحديد العائق اعتمادا على شبكة من شبكات تحليل التمثلات (مصادر التمثلات) أو قياس الفارق بين التمثل والمعرفة العلمية.
- اختيار أهداف المضمون المراد تعلمها انطلاقا من شبكة مفاهيمية (تحليل المادة) أو اعتماده صنافة من صنافات الأهداف (يمكن البدء بهذه الخطوة).

3- بين التمثل والمفهوم

مكونات المعرفة الرياضية:

- **المفاهيم والمصطلحات.**
- **التعميمات.**
- **الخوارزميات والمهارات.**
- **المسائل.**

المفاهيم والمصطلحات الرياضية:

- المفهوم: هو تصور عقلي ينشأ عن تجريد خاصية أو أكثر من مواقف متعددة، تتوفر في كل منها هذه الخاصية، حيث تُعزل هذه الخاصية مما يحيط بها من المواقف المعينة، وتُعطى اسماً يُعبّر عنه بلفظ أو رمز.
- المفهوم في الرياضيات عبارة عن فكرة مجردة أو صورة ذهنية (عقلية) يكوّنها الفرد حول عدة أشياء أو مواقف رياضية تشترك جميعها في خاصية أو أكثر، بحيث يمكن الاعتماد على هذه الفكرة في تصنيف الأشياء وتحديد ما إذا كانت أمثلة أو ليست أمثلة على هذه الفكرة المجردة.

مثال:

- مفهوم الاثنين أو خاصية الاثنينية ما هي إلا تجريد عقلي للخاصية المشتركة الموجودة في كثير من المواقف ومنها: (الوالدان، الزوجان، العينان، الأذنان، الذراعان، القدمان،)
- حيث إن كلاً من هذه أمثلة تسمى اثنان ويرمز لها بالرمز (2)، ومع تجريد هذه الخاصية فإن مفهوم العدد اثنين (2) ليس له علاقة بالوالدين أو الزوجين أو العينين، ...

يجب عند تعريف المفهوم التمييز بين السمة المميزة، وبين السمة غير المميزة؛ فالسمة المميزة للمفهوم، هي الخصائص التي يجب أن تتوفر في جميع أمثلة المفهوم. أما السمة غير المميزة فهي الخاصية أو الصفة التي يشترك فيها مع مفاهيم أخرى.

فمثلاً: السمات المميزة للمستطيل، والتي يجب أن تتوفر فيه هي:

- متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة.
- رباعي محدب(دائري) زاوياه قائمة.

السمات غير المميزة للمستطيل، منها:

- الضلعان المتقابلان متوازيان.
- الضلعان المتقابلان متقايسان.
- القطران متناصفان.
- رباعي محدب(دائري).

تعريف المفهوم يجب أن يكون من خلال السمة أو السمات المميزة له. فيعرف المستطيل بأنه رباعي محدب جميع زواياه قوائم.

عندما يتم تعريف المفهوم بالسمة غير المميزة فإن التعريف يكون ناقصا، فلو عُـرف المستطيل بأنه رباعي محدب فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين، فإن هذا التعريف أو الوصف للشكل، لا يقتضي أن يكون الشكل مستطيلاً.

السمات غير المميزة هي التي لا تتوفر في جميع أمثلة المفهوم، فمثلاً طولا الضلعين والمساحة هي عبارة عن سمات غير مميزة للمستطيل، فليس شرطاً أن يكون لجميع المستطيلات المساحة نفسها، أو أن يكون لها الأطوال نفسها.

المفاهيم المعرّفة والمفاهيم غير المعرفة:

- **المفهوم المعرف:** هو الذي يمكن التعبير عنه بصياغات لفظية شارحة (مفسّرة) بدلالة مفاهيم أخرى أبسط منها أو سبق تعريفها وتوضيحها.

فتعريف المستطيل بأنه: شكل رباعي جميع زواياه قوائم. جميع المصطلحات المستخدمة في التعريف تكون معروفة من قبل، فالمفاهيم الواردة في التعريف: الشكل الرباعي، الزاوية، الزاوية القائمة كلها معروفة وواضحة.

- **المفاهيم غير المعرفة(الأولية):** وهي المفاهيم التي تقبل بدون تعريف، ولكنه يتمّ تحديد بعض خواصها، أي أن المفاهيم غير المعرفة لا يمكن إيجاد عبارة تصف المفهوم وصفاً محدداً. ومن أمثلة المفاهيم غير المعرفة: النقطة، المستقيم، المستوي، المجموعة، ...

تدريس المفاهيم الرياضية:

تشكل عملية اكتساب المفاهيم جزءاً أساسياً ومهماً من عملية التعلم. حيث يقوم المعلمون بتدريس مفاهيم جديدة ومتنوعة لطلبتهم وذلك بشكل مستمر وسنذكر فيما يلي بعضاً من التحركات التي يتبعها المعلمون عند تدريسهم للمفاهيم:

1. تحرك التصنيف: يتم في هذا التحرك، تحديد مجموعة أشمل وأعم تحتوي مجموع إسناد المفهوم. أي أنه يتم تحديد مجموعة أشمل ينتمي إليها المفهوم.

فمثلاً عند تقديم مفهوم المثلث: نصنفه ضمن مجموعة أشمل وهي المضلعات المغلقة.

2. **تحرك التحديد:** يتم في هذا التحرك، تحديد جميع الخصائص أو السمات المميزة للمفهوم.

فمثلاً عند تقديم مفهوم العدد الأولي: نقدمه على أنه العدد الذي له الطبيعي الذي يختلف عن 1، ولا يقبل القسمة إلا على نفسه والواحد.

3. **تحرك التحليل:** في هذا التحرك يتم تحديد مجموعة جزئية واحدة أو أكثر من مجموعة اسناد للمفهوم.

فمثلاً عند تقديم مفهوم الشكل الرباعي: يتم تقديمه من خلال ذكر مجموعة المستطيلات أو مجموعة المعينات باعتبارها مجموعات جزئية من مجموعة إسناد الشكل الرباعي.

. **تحرك المقارنة:** يتم في هذا التحرك، تحديد أوجه الشبه والاختلاف بين المفهوم الحالي ومفهوم آخر سبق تعلمه.

فمثلاً عند تقديم مفهوم المعين: يتم مقارنته بمفهوم المربع، وعند تقديم مفهوم المتباينة يتم مقارنته بمفهوم المساواة.

5. **تحرك الرسم:** يقوم المعلم في هذا التحرك برسم شكل توضيحي للمفهوم.

فمثلاً يرسم المربع أو المستطيل أو المستقيمين المتوازيين أو الدائرة أو ...

يعد تحرك الرسم من التحركات المهمة في تدريس المفاهيم الهندسية. ويمكن أن يدعم تحرك الرسم التحركات الأخرى التي يستخدمها المعلم.

6. تحرك التعريف: في هذا الإجراء يقوم المعلم بإعطاء المفهوم تفسيراً وشرحاً لغوياً يوضح معناه.

- يعد تحرك التعريف من أكثر التحركات شيوعاً في الاستعمال وسهولة في الاستخدام، وأكثرها دقة في تحديد المفهوم.
- في الوقت نفسه يعد تحرك التعريف من التحركات الصعبة على التلاميذ خاصة في المراحل المبكّرة، مما يجعلهم يلجؤون لحفظ التعريفات دون فهم، وبالتالي لا يستطيعون توظيف هذه المفاهيم واستخدامها.
- على الرغم من أهمية التعريف ودوره في تحديد المفهوم وتوضيحه، إلا أنه ليس ضرورياً في تكوين المفهوم ولا في استخدامه، طالما أن المفهوم موضحاً بطرق إجرائية وأمثلة توضيحية. أي أن عملية إعطاء تعريف للمفهوم يعتمد على المستوى الدراسي للطالب، وعلى المستوى العقلي واللغوي، ومدى تجريد المفهوم نفسه، ولكن يظل إعطاء تعريف للمفهوم مطلباً أساسياً وخاصة في المراحل العليا.

تعريف العدد الزوجي مثلا.

7. تحرك المثال: في هذا النوع من التحركات يقوم المعلم بتقديم مثال أو أكثر على المفهوم، على أن تتوفر في كل مثال جميع خصائص المفهوم.

فمثلاً عند تدريس مفهوم العدد الأولي: يعطي المعلم أمثلة على العدد الأولي مثل: 2، 3، 5، 7، 11، 13، ...

8. تحرك اللا مثال: يقصد باللا مثال الحالة أو النموذج التي لا يتوفر فيها خاصية أو أكثر من خصائص المفهوم. وتحرك اللا مثال (المثال السلبي) يعني تقديم مثال أو أكثر لا ينتمي للمفهوم، أي أنها أمثلة عدم انتماء للمفهوم.

فمثلاً في مفهوم العدد الزوجي (العدد الذي يقبل القسمة على اثنين) تكون الأعداد: 3، 7، 49 لا أمثلة على مفهوم العدد الزوجي.

في مفهوم المضلع يكون شكل الدائرة لا مثال على المضلع.

التمثل:

- التمثل هو استحضار الأشخاص أو الأشياء إلى الذاكرة أو الذهن.
- التمثل أو التصور في أعمال بياجي هو مجموع التصورات الفكرية التي تتكون لدى الذات حول الموضوع من خلال تفاعلهما المستور، فهذه التصورات هي بمثابة تأويلات تستند على عملية تلاءم مع خصائص الموضوع،

وبعدها إلى استيعاب "المعلومات" الصادرة عن الموضوع في إطار البنيات الذهنية التي تشكلت في مرحلة ما من مراحل نمو الفرد/ الذات.

- ومن هنا يبدو أن البعد المعرفي للتمثلات هو البعد الأكثر أهمية من وجهة نظرنا الديداكتيكية، لأنها تشير إلى نوع من النظريات الشخصية التي تمنح للفرد تفسيرا أو تأويلا للظواهر الملموسة أو المجردة.

المدلول الديداكتيكـي للتمثل

- **تعريف Jean Migne(1970):** " يعتبر التمثل نموذجا شخصيا فهو كذلك عملية تنظيم لمعارف ومعلومات تهدف إلى حل مشكل معين(...) إن التباين بين التمثل والمفهوم العلمي لا يتشكل في درجة اختلافهما فقط، بل يكمن في كونهما نمطين مختلفين من المعرفة، فإذا كان الأول يتجسد في شبكة من العلاقات المعبر عنها بواسطة صيغ إجرائية، فإن الثاني يغلب عليه الطابع التصوري"
- **تعريف Astolfi (1983):** التمثلات هي عملية فكرية صعبة بالنسبة للمتعلم، والتي تتوقف خصائصها على تنظيم المعارف في الذهن وعلى العوائق الخاصة بكل حقل معرفي للترميز الذي يكتسبه المتعلم انطلاقا من الوضعية التفاعلية الفردية".

4- نظرية الحقول المفاهيمية

G. Vergnaud مؤلف كتاب "**نظرية الحقول المفاهيمية**" ، وهو عمل بدأه عام 1980. ويصفه بأنه "نظرية معرفية تهدف إلى توفير إطار متماسك وبعض المبادئ الأساسية لدراسة تنمية وتعلم الكفاءات المعقدة، بما في ذلك تلك المتعلقة بالعلوم والتقنيات. "(Vergnaud، 1990).

نظرية الحقول المفاهيمية: هي نظرية معرفية، من أجل "**توفير إطار يسمح بفهم التمفصلات والقطائع بين المعرفة والمعرفة المعبر عنها**" إنه يتعلق بفهم كيف يتم بناء المفاهيم من نشاط في الموضوع ما. يُكتسب المفهوم من خلال الوضعيات والمشكلات التي يحلها.

- **الحقل المفاهيمي**

"فضاء من المشاكل أو وضعيات المشكل –التي ينطوي علاجها على عدة مفاهيم وسيرورات متصلة ببعضها، وكذلك التمثيلات اللغوية والرمزية التي يمكن استخدامها لتمثيلها.

المخطط، الخطة المسار Le schème

"التنظيم الثابت الذي يقود لعائلة من المشاكل". في المخطط، يجب أن نبحث عن المعارف النشطة للموضوع، وهذا يعني العناصر المعرفية التي تسمح بالنشاط في الموضوع تكون عملية.

مثال: لمخطط حل معادلات النموذج $ax + b = c$. طلاب الأولى متوسط مثلا a ، b و c موجبة.

- عند طرح b من طرفي المساواة، لا تتغير المعادلة.
- بقسمة طرفي المساواة على a، لا تتغير المعادلة.

هذا المخطط، الذي يكون فعالًا للغاية (وموثوقًا به) لكن عندما b أكبر من c ، يصبح أقل موثوقية لهؤلاء الطلاب ، على سبيل المثال.

الوضعية والمخططات:

الطفل يتعلم بالتصرف من خلال مختلف الأنشطة التي تواجهه وهو ما يميز المخطط (Schème) "**النظام الثابت لتصرف مع مجموعة من الوضعيات المعطاة**" مثلا: إحصاء عناصر هو مخطط.

نتيجة (المفاهيم والمخططات):

لا يمكن اختزال مفهوم ما في تعريفه. **من خلال الوضعيات والمشاكل التي يحلها، يكتسب الطفل معنى المفهوم.**

المفاهيم.

يمر تعليم وتعلّم الكائنات الرياضياتية بسيرورة مشابهة لنشأة ونمو الكائنات الحية؛ ولكي يتم بذر وتنمية وتطوير مفهوم رياضياتي ما في عقل المتعلّم بشكل بنائي، متماش ونظرية التطور المعرفي لبياجي، وبطريقة تسمح بفهم ومراقبة هذا النمو والتطور، اقترح فيرنيو نظرية "الحقل مفاهيمي". يعتمد هذا النظام على تمييز متعدد الجوانب للمفاهيم فحسب فيرنيو، يقوم المفهوم الرياضياتي على ركائز أساسية تتمثل في **ثلاثية مفاهيمية:**

S : جميع الوضعيات أو المشكلات التي تعطي معنى للمفهوم. (يلمس وظيفيته ويدرك أهميته كأداة مثلى لمعالجة تلك الوضعيات). كل عنصر من عناصر S هو تجسيد للمفهوم، أحد ممثليها. **(المرجع)**

I : مجموعة الثوابت (الخصائص) التي يعتمد عليها في عمل المخططات، وهي مجموعة من الخصائص المشتركة لعناصر S والتي تجعلها جميعًا مناسبة في نفس المجال المفاهيمي. (مجموعة التعاريف والمبرهنات والخصائص التي تسمح بتبرير ما يمارس على المفهوم من إجراءات وتقنيات). **(المعنى)**

S’ : جميع الأشكال اللغوية وغير اللغوية التي تمثل رمزيا المفهوم وخصائصه والوضعيات وإجراءات العلاج. عبارة عن مجموعة من المصطلحات والتسميات أو الرموز التي تحدد المفهوم وخصائصه والوضعيات التي يعمل فيها. **(الدلالة)**

خلاصة.

لقد رأينا أن بياجيه يؤكد على عملية التكيف وعدم التوازن وإعادة التوازن وأن فيجوتسكي يؤكد بأن الاجتماعية واللغة والترميز هي العمليات المركزية للتنمية المعرفية. وفقًا لتأثيرات نظريتي بياجيه وفيجوتسكي، يطور جيرار فيرنيو نظرية الحقول المفاهيمية التي يؤكد فيها بأن **المخططات Les Schèmes** تقع في قلب التطور المعرفي.

من الطريقة التي يعرف بها فيرنيو مفهوم المخطط، من خلال تقديم عناصر لهذا التعريف، من الممكن إجراء تحليل للتطور المفاهيمي بعد تكيف الأفراد مع الوضعيات الجديدة: في حالة فشل، يقوم الفرد بتعديل المخطط المستخدم أو حتى أنه يغير المخطط.

الطالب الخاطئ غالبًا ما يكون طالبًا لم ينفذ المخطط بشكل سليم. إما أنه يتكيف بشكل سيء مع مخطط، لخصوصية الوضعية المراد معالجتها (مشكلة التفكير والمنطق)، أو أنه يقوم بتعبئة مخطط غير مناسب للوضعية المطلوب معالجتها (مشكل في المفهوم والتصور)، أو قام بتطوير **نظرية نشطة** خاطئة.

المفاهيم لا معنى لها عندما تكون معزولة، لكنها تتعايش في شبكة من المفاهيم الأخرى، والتي تكون الحقل المفاهيمي.

يعتبر Vergnaud مفهوم **المخطط** بمثابة مفهوم أساسي:

وهو يتألف من قواعد النشاط أو الفعل والاستباق والتوقع، ولكن أيضًا من **الثوابت العملياتية.**

هذه هي في الأساس التي ستستثمرها ديداكتيك الرياضيات في بحوثها.

يميز Vergnaud بين ثلاثة أنواع منطقيه من **الثوابت العملياتية:**

- ❑ **النظريات النشطة** هي جزء من المخطط، يمكن أن تكون صحيحة أو خاطئة؛ **النظريات النشطة** تشير إلى "خصائص العلاقات التي يتم كتابتها أو استخدامها من قبل الطالب في وضعيات حل المشكلات، وهذا لا يعني أنه قادر على شرحها أو تبريرها"؛

النظرية النشطة هي عبارة عن نمط من الخصائص، فهي قد تكون صحيحة أو خاطئة.

مثال1: $10 \times 4.7 = 4.70$ ("عند ضرب عدد في 10، أضف 0".)

مثال2. إذا ذكرنا الاستلزام p (المثلثان متقايسان) فإن q (المثلثين لهما نفس المساحة).

فإن التلميذ ينتقل مباشرة من $p \Longrightarrow q$ إلى $non\ p \Rightarrow non\ q$ **منطق طبيعي**

- الثوابت من نوع "**الوظيفة التناسبية**": لا غنى عنها لبناء الخواص؛ **المفاهيم النشطة** هي جزء منها؛ هي الخصائص والعلاقات (المفاهيم النشطة –وليس بالضرورة واعية).
- الثوابت من نوع "الحجة"؛ في الرياضيات، يمكن أن تكون الحجج عبارة عن أشياء وأرقام. الأعداد والخصائص والعلاقات، إلخ.

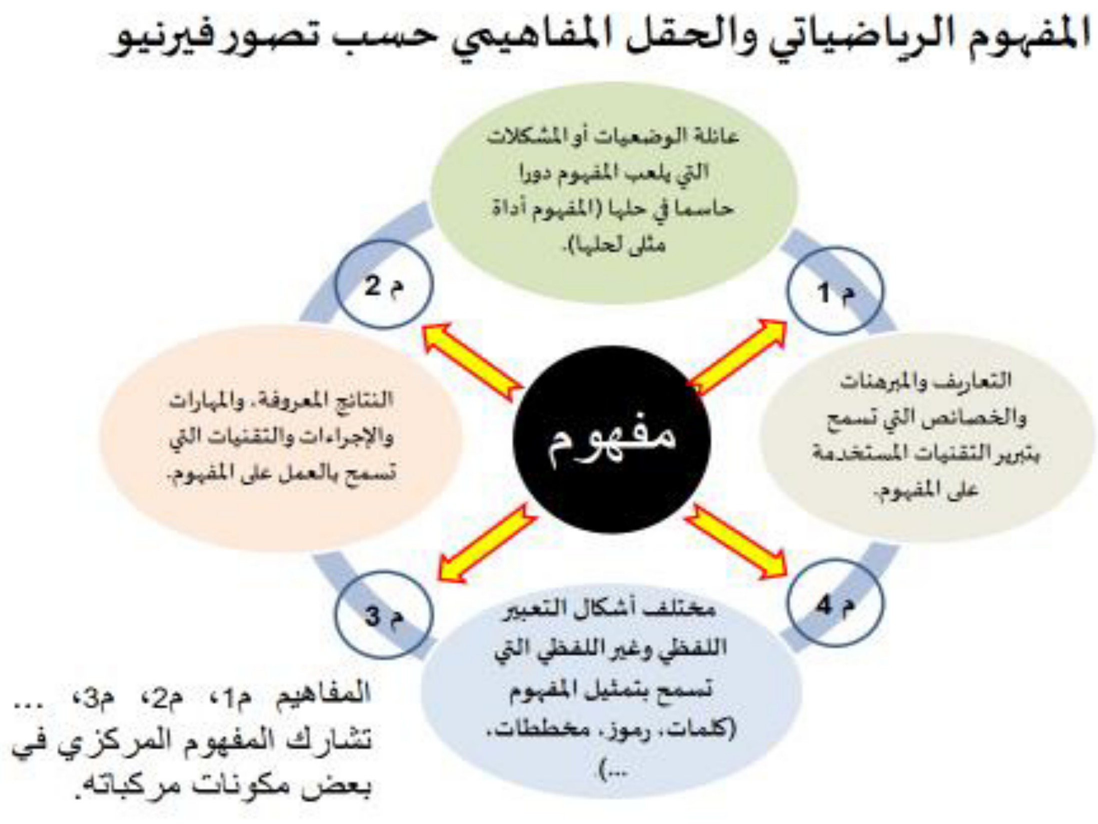
يمكن لوضعية واحدة أن تولد حقلا مفاهيميا. فعلى سبيل المثال، يمكن لوضعية شراء أن تولد مشكلات مرتبطة بكل من المفاهيم الثلاث (الضرب، القسمة، التناسبية):

أ) مشكلات ضربية: ما هو ثمن 13 قلما علما أن سعر القلم الواحد 20 دينارا؟

ب) مشكلات قسمة: ثمن 7 صحون 560 دينارا، ما هو سعر الصحن الواحد؟

ج) مشكلات تناسبية: ما هو ثمن 17 قطعة حلوى علما أن ثمن 4 قطع منها هو 6 دينار؟

قدم فيرنيو مثالين لنظرية الحقول المفاهيمية، حقل البنية الجمعية يخص (الجمع والطرح) وحقل البنية الضربية يخص (الضرب، القسمة، التناسبية).



مفهوم السجلات السيمائية

يشير مصطلح السيمياء (sémiotique) إلى علم موضوعه دراسة العلامات أو الإشارات من حيث جوهرها وطبيعتها (لسانية وغير لسانية) والسعي إلى كشف القوانين المادية والنفسية التي تحكمها وتتيح إمكانية تمفصلها داخل التركيب أو نظام التمثيل الذي تتشكل فيه، وكذا دراسة علائقها ووظائفها فيما بينها ومع غيرها.

يميّز ديفال (Duval) بين نوعين من التمثيل للمفاهيم العلمية، تمثيل سيميائي (محسوس أو شبه محسوس) وتمثيل ذهني (تصور مجرد) (Duval, 1993). ففي حين يتم إنتاج التصورات (التمثيلات الذهنية) التي تخص الكائنات الفيزيائية بالتعامل المباشر مع هذه الكائنات، يتطلب إنتاج التصورات التي تخص الكائنات الرياضياتية المرور بإنتاج تمثيلات سيميائية لها نظرا لتعذر التعامل المباشر مع هذه الكائنات باعتبار ها كائنات مجردة.

التمثيل السيميائي هو نوع من الإنتاج، يتم بواسطة مجموعة من العلامات ضمن نظام تمثيل سيميائي له قيوده وآليات تشغيله وأهميته الخاصة في تلبية بعض الوظائف المعرفية (عمليات). أطلق ديفال على هذا النظام مصطلح "سِجل تمثيل سيميائي" (Duval, 1993).

يُشترط في أنظمة التمثيل السيميائي، حسب ديفال، أن تسمح بإنجاز ثلاث عمليات معرفية أساسية مترابطة وهي: التشكيل والمعالجة والتحويل.

التشكيل: إنشاء تمثيل للمفهوم في أحد السجلات الممكنة؛

المعالجة: عمليات التعامل مع المفهوم داخل هذا السجّل "تحويل داخلي"؛

التحويل: الانتقال والتعامل مع المفهوم في سجل آخر "تحويل خارجي".

ملاحظات:

- يوفر كل تمثيل سيميائي مدخلا جزئياً إلى المفهوم الذي يمثله حيث يسمح بتنفيذ عمليات ومهمّات محددة عليه (يبرز بعض جوانب المفهوم)؛
- تتميز معظم المفاهيم الرياضياتية بتعدّد جوانبها؛ وبالتالي إنتاج تصور ذهني لها يتطلب استخدام عدة سجلات تمثيل سيميائي؛
- استخدام عدة سجلاّت لتمثيل المفهوم، يساعد المتعلّم على عدم الخلط بين المفهوم وأحد تمثيلاته.

- أهم سجلات التمثيل السيميائي التي تستخدم في الرياضيات المدرسية: **سجل اللغة الطبيعية، السجل العددي، السجل الجبري، السجل البياني، ...**

دور فكرتي الحقل المفاهيمي والسجلات السيميائية في تعليم وتعلّم الرياضيات

- تسمح أفكار الحقل المفاهيمي بما يلي:

– **تبرير التعلّمات** (تمكين المتعلّم من إعطاء معنى لما يتعلمه عبر إدراك أهمية المعرفة الجديدة والحاجة إليها في الحياة عموما وفي الرياضيات خصوصا).

– **تنظيم التعلّمات**

✓ تركيز نشاط المتعلّم في البداية على القيام ببعض الإجراءات والعمليات، اعتمادا على خبرته ومكتسباته السابقة قصد اكتساب بعض التقنيات؛

✓ اكتشاف ما يبرر تلك الإجراءات والتقنيات (خصائص المفهوم)؛

✓ مأسسة ما يتم التوصل إليه من نتائج من خلال تعميمها وتثبيتها بما يناسب (تعريف، خاصية، مهارة، ...) ثم العمل على رسملتها من خلال التدرب على التحكم في استخدامها والنظر في امتداداتها الممكنة.

- كما تسمح أفكار السجلات السيميائية بما يلي:

– التعرف على مختلف جوانب المفاهيم الرياضياتية؛

– تنويع النشاطات على المفاهيم الرياضياتية؛

– توفير بيئة ثرية لإنجاز المهمّات المركبة (التنسيق بين السجلات)؛

– الوعي بكنه الكائنات الرياضياتية (كائنات مجردة).

تطبيق:

سنحاول من خلال هذا التطبيق توضيح كيفية استخدام بعض أفكار الحقل المفاهيمي والسجلات السيميائية في تعليم وتعلّم مفهوم الدالة.

– من ناحية الحقل المفاهيمي: نعتمد على وضعيات بسيطة ذات دلالة، تتضمن مهمّات يطلب من المتعلّم إنجازها.

– من ناحية سجلات التمثيل السيميائي: نركّز على أهمّ السجلات التي نعتقد أنها تغطي مختلف جوانب مفهوم الدالة (اللغوي، العددي، الرمزي والبياني).

تعليم وتعلّم مفهوم الدالة

من أوائل التعاريف لمفهوم الدالة التعريف له ظهر عند برنولي عام 1718 « دالة مقدار»؛ أما التعريف الأقرب لما هو عليه التعريف الحالي يعود إلى أولر 1755.

- يعتبر مفهوم الدالة أحد أهم المفاهيم المهيكلة لبرامج الرياضيات للتعليم الثانوي، حيث يُتّخذ كأداة مركزية لتنمية الكفاءات الرياضياتية لدى المتعلّم خاصة ما تعلق بالنمذجة وحل المشكلات.

- بيّنت دراسات كثيرة أن معظم متعلّمي الثانوي وحتى بعض الجامعيين منهم يجدون صعوبات جمة في تمييز مفهوم الدالة والتنسيق بين سجّلين مختلفين في إنجاز بعض المهمّات المتعلّقة بالدوال:

Duval (1988), Schwarz et Dreyfus (1995), Hitt (1998) , Sajka (2003)، مما يدلّل على وجود اختلالات في تدريس هذا المفهوم.

- تتمثّل المهمّات المرتبطة بالدوال عموما فيما يلي:

- وصف الارتباطات بين كميات ضمن سجل معيّن (جدول قيم، تمثيل بياني، عبارة جبرية، تعبير لفظي، جدول تغيرات).

- يُشرع في تعلّم مفهوم الدالة، حسب المناهج الجزائرية، ابتداء من السنة الرابعة متوسط، وذلك من خلال استغلال وضعيات مألوفة، تتعلق بالتناسبية، في إدخال مفهوم الدالة الخطية ثم الدالة التآلفية مع الاكتفاء بالإدراك الحدسي لمفهوم الدالة كعلاقة بين مقدارين.

يمكن استغلال أفكار كل من نظريتي الحقل المفاهيمي والسجلات السيميائية في استكمال إرساء مفهوم الدالة اعتبارا من السنة الأولى ثانوي، على النحو المقترح في النشاط الموالي.

نشاط مقترح لمقاربة "مفهوم الدالة"

نشكّل بواسطة حبل طوله $10m$ رباعيا قائما (زواياه الأربع قائمة).

1) أحسب مساحة هذا الرباعي عندما يكون أحد بعديه $1m$، $1.5m$، $2m$، $3m$، $3.5m$، $4m$

2) هل يمكن تشكيل رباعي من النمط السابق مساحته $7m^2$؟

3) نرمز لأحد بعدي الرباعي السابق بالحرف x.

- ماهي القيم الممكنة للعدد x^2 ؟
- عبّر عن مساحة هذا الرباعي بدلالة x . (نرمز للمساحة بـ $S(x) = x^2$)

4) تحقق من النتائج المتحصل عليها في السؤال الأول ومثّلها في معلم متعامد ومتجانس، ثم اقترح تمثيلا بيانيا يصف تغيّر مساحة الرباعي السابق تبعا لتغير قيم .

5) أعد مناقشة السؤال الثاني بأسلوبين مختلفين.

– ماهي أكبر مساحة يمكن الحصول عليها؟ وماهي طبيعة الرباعي الناتج حينئذ؟

6) ما الذي يمكن استخلاصه من هذا النشاط؟

5- تطبيق رياضي (الحقل المفاهيمي للمتباينات)

نبدأ بحصر جملة من المخططات والنظريات النشطة التي نستعملها في موجهة المشاكل في هذا الحقل.

- **العلاقة بين المتوسط الهندسي والحسابي.**

حالة $n = 2$

من أجل كل عددين حقيقين a, b موجبين لدينا:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt[2]{ab} \dots (1)$$

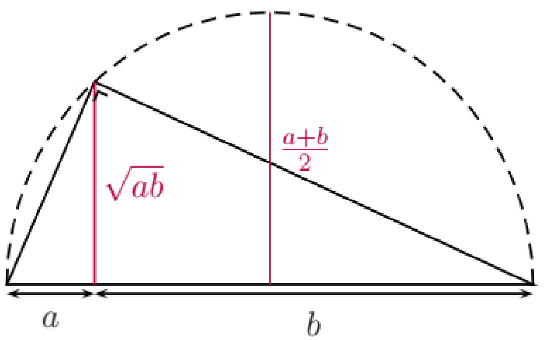
الإثبات:

بملاحظة أن:

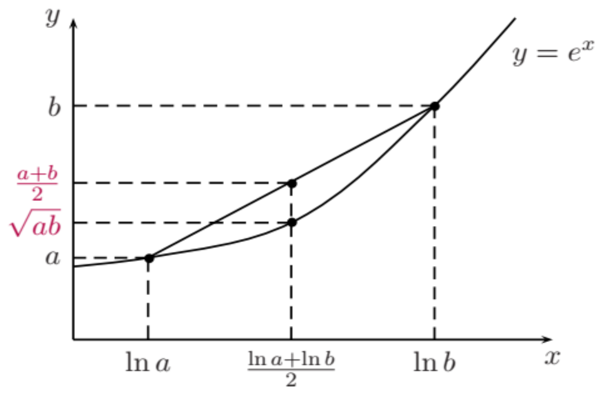
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

ينتج الجواب مباشرة.

وبطريقة هندسية، يمكنك استنتاج ذلك من الشكل المقابل



بطريقة تحليلية (استغلال تحدب الدالة الأسية)



حالة $n = 3$

من أجل كل أعداد حقيقية a , b و c موجبة لدينا:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \ldots (2)$$

الإثبات.

لتكن $a_1, a_2,\ a_3,\ a_4$ أعداد حقيقية موجبة، بوضع: $a = \frac{a_1+a_2}{2}$ و $b = \frac{a_3+a_4}{2}$

نطبق العلاقة 1 من أجل a, b فنجد:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2} &\geqslant \sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}}\\ &\geqslant \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}}\end{aligned}$$

فنستنتج العلاقة المطلوبة.

طريقة ثانية:

لنثبت أن:

$$a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$$

ثم نضع:$\beta = b^3\ , \alpha = a^3, \delta = c^3$ فتنتج العلاقة.

في سبيل ذلك سنستخدم **التناظر** الموجود في العبارة ثم نظرية **إعادة التحويل**(مرتين).

التناظر:

نفرض أن:

$$a \geq b \geq c$$

ينتج مباشرة:

$$a^2 \geq b^2 \geq c^2 \text{ و } ab \geq ac \geq bc$$

نظرية **إعادة التحويل:**

لتكن $a_1, a_2,\ a_3$ و $b_1, b_2,\ b_3$ سلسلتين من الأعداد الموجبة بحيث:$a_1 \geq a_2 \geq a_3$ و $b_1 \geq b_2 \geq b_3$

عندئذ المجموع:

$$\sum_1^3 a_i b_i$$

يأخذ **قيمة أعظمية** في حالة السلسلتين مرتبتين بنفس الترتيب ويأخذ **قيمة صغرى** في حالة الترتيب المعاكس (الواحدة بالنسبة للأخرى).

لنأخذ السلسلتين $a \geq b \geq c$ و $a^2 \geq b^2 \geq c^2$، ونعيد الترتيب فينتج:

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^2.\boldsymbol{a} + b^2.\boldsymbol{b} + c^2.\boldsymbol{c} \geq a^2.\boldsymbol{b} + b^2.\boldsymbol{c} + c^2.\boldsymbol{a} = (ab)a + (bc)b + (ca)c$$

لنعيد الترتيب مرة أخرى بعكس الترتيب بالنسبة للثانية $c \leq b \leq a$ (المجموع السابق سيكون أصغري في هذه الحالة):

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq (ab)\boldsymbol{a} + (ca)\boldsymbol{c} + (bc)\boldsymbol{b} \geq abc + cab + bca = 3abc$$

– **متابينة تشيبيتشاف L'inégalité de Tchebychev**

a_1, a_2, a_3 و b_1, b_2, b_3 سلسلتين من الأعداد الحقيقية بحيث: $a_3 \geq a_2 \geq a_1$ و $b_3 \geq b_2 \geq b_1$ عندئذ،

$$\sum_1^3 \frac{a_i}{3} . \sum_1^3 \frac{b_i}{3} \leq \sum_1^3 \frac{a_i b_i}{3}$$

وفي حالة $b_1 \geq b_2 \geq b_3$ لدينا،

$$\sum_1^3 \frac{a_i}{3} . \sum_1^3 \frac{b_i}{3} \geq \sum_1^3 \frac{a_i b_i}{3}$$

أثبت ذلك، ثم عمم.

تطبيقات. (يمكن قبل البدء في الإثبات، حشد النظريات النشطة في هذا الحقل)

1− a, b و c أطوال أضلاع مثلث. أثبت:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

2− x, y عددين حقيقيين موجبين تماما. أثبت أن:

$$\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{x^2+y^4} \leqslant \frac{1}{xy}.$$

3− a, b و c ثلاث اعداد حقيقية موجبة تماما. أثبت:

$$(a+b+c).\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

عمم هذه القاعدة إلى n عدد حقيقي موجب مع الإثبات.

4− a, b عددن حقيقيين موجبين تماما. أوجد القيمة العظمى للمقدار:

$$\frac{a^6}{b^6}+\frac{a^4}{b^4}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^6}{a^6}+\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^2}{a^2}.$$

5- a , b و c ثلاث اعداد حقيقية موجبة تماما. أثبت:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

6- $x_1, x_2,\ x_3, \dots\ \ x_n$ أعداد حقيقية موجبة تماما. أثبت:

$$\left(\frac{x_1+\ x_2+x_3+\cdots+\ x_n}{n}\right)^n\geq\ x_1.x_2.\ x_3\dots\ \ x_n$$

كيف توظف هذه العلاقة في إعادة إثبات التمرين 3

السداسي الثاني

البرهان الرياضي

مقدمة: ما البرهان؟ هل سبق لك أن تساءلت عن معنى كلمة "برهان" سيما في الرياضيات؟ وهل توصلت إلى تعريف دقيق لهذا المعنى؟ ألم تقل يوما ما إن " البرهان هو توضيح وشرح الحقيقة بشكل بديهي سليم"؟ أو إنه " تبيان حقيقة بحجج مقنعة لا غبار عليها وغير قابلة للنقاش"؟ أتظن أن تعريفا كهذا يقبله العام والخاص؟

إذا تحدثنا عن الرياضيات وبراهين النظريات المقدمة خلال تدريسها لنا فلا بد أن نعترف بأن درجة اقتناعنا بهذه البراهين تتوقف على مدى ثقتنا فيما يقوله الأستاذ المدرس! كم من أستاذ قدم برهانا سليما على السبورة لكن انعدام الثقة بينه وبين تلاميذه جعلت هؤلاء يطرحون عليه وابلا من الأسئلة أربكته وأفقدته يقينه ببرهانه ... وكم من أستاذ أخفق في تقديم أحد البراهين إلا أن الثقة الكاملة في قدرة هذا الأستاذ جعلت التلاميذ يصدقون تصديقا أعمى ما روي لهم ويحجمون عن طرح أي سؤال!

وقد تفنن أساتذة الرياضيات في عرض براهينهم على السبورة أمام طلابهم وذلك بهدف تفادي المشاكل التي قد تنجر عن برهان كامل وواضح! وهكذا نجد أحدهم يقدم برهانا بمثال ... كأن يكتفي خلال عرض برهان نظرية عامة بإثبات حالة خاصة منها ثم يقول: " لا داعي لإثبات الحالة العامة لأن العناصر الأساسية موجودة في هذه الحالة الخاصة"! ومن هؤلاء الأساتذة من يقدم برهانا "بالترهيب"! يحدث ذلك عندما يكتب الأستاذ على سبورته نتيجة من النتائج ثم يقول: " هذا بديهي" أو " البرهان على هذه النتيجة تافه" أو " من المعلوم أن هذه النتيجة صحيحة" أو " الكل يعرف هذه النتيجة"! إذا استمع الطلبة إلى هذه المقولة من المقولات فمن يتجرأ، بعد ذلك، ويسأل: لماذا وكيف؟!

وفي بعض الأحيان يصبح الأستاذ أمام السبورة كالقاضي في المحكمة يصدر الأحكام والقرارات! ... يحدث ذلك مثلا عندما يورد هذا الأستاذ نص نتيجة خلال عرضه لبحث، وبدل البرهان عليها يكتفي بالقول: "لقد التقيت منذ أسبوعين بالعلامة فلان وقال لي إن هذه النتيجة أكيدة"! ويعمد بعض الأساتذة لدى تقديمهم لبراهين معينة استخدام الرموز بشكل لا يطاق فيستعملون الرموز الخاصة بالرياضيات إضافة إلى أبجديتين أو ثلاث (العربية واللاتينية واليونانية ...). وهكذا يصاب المستمع بالإرهاق ويصعب عليه التمعن في البرهان.

ظهر البرهان في الأول في نطاق اجتماعي (القرن 6 ق.م) عند اليونان لأجل إقناع الآخرين. مدرسة أفلاطون تؤكد على ضرورة التمييز بين العلم والرأي، العلم هو المعرفة الصحيحة والمؤكدة، فأي خاصية نقوا أنها تعرف علما عندما نعرف لماذا هي كذلك وكذلك لماذا لا تكون بخلاف ذالك. أرسطو " **المعرفة هي أن تعرف عن طريق الحجة كيف ستقنع**".

التفكير الاستنتاجي يجعل المبرهنات الرياضية خصائص علمية، أقليدس في كتاب الأصول يتبع المنهجية التالية: تقديم جملة من التعاريف ومسلمات وبديهيات متبوعة بمجموعة من المبرهنات والنظريات نتائجها مبرهنة باستعمال الخلف المتكرر بكثرة، ولا يوجد أي مؤشر على كيفية إنتاج البراهين، نفس الشيء عتد أرخميدس، أو التركيب(التحليل- التركيب)، أُقليدس يقتصر على التركيب أو الإنشاء الرياضي، وأحيانا الاستنتاج. قراءة براهين أقليدس تشير إلى أن الهم الوحيد له هو درجة الإقناع.

البرهان الرياضي:

- سلسلة من الخطوات المترابطة قصد تثبيت صحة نتيجة ما. (مستقل عن التجربة والملاحظة) باستثناء تلك المؤدية إلى وضع تخمينات (Des conjectures) التي يتم برهنتها.
- هو تتابع لسلسلة استنتاجيه، والتي تبدأ من معطيان وتصل إلى خلاصة.
- تتابع عبارات مترابطة موجهة نحو إثبات صحة نتيجة معينة بواسطة مجموعة مقبولة من البديهيات والتعاريف والعبارات السابق برهنها.

نبرهن: نقدم التبريرات. هل هذا صحيح؟ ثم لماذا صحيح؟

Est-ce que c'est vrai, pourquoi est-ce vrai

البرهان: لا وقتي، لاذاتي.

ملاحظات: لا تتم كتابة برهان بالمعنى المعطى إلا إذا ترجمت الحجج والتفاسير داخل الإطار النظري وبنيت على الشكل الاستنتاجي.

إذا كنا نبحث في مشكل (ليس تمرين، الذي حله يكون ممارسة تطبيق قانون مباشرة) فاكتشاف الحجج يتم عن عدة طرق أبرزها:

توظيف الاستقراء بفحص أمثلة خاصة، إذا قصد البحث عن القانون الذي يتصرف في المشكل.

تغيير إطار المشكل (من إطار هندسي إلى إطار جبري أو تحليلي) لتوظيف أدوات الإطار الجديد (المشكل يصبح حل معادلة مثلا إذا ترجم جبريا).

الاستدلال الاستنتاجي:

نعطي من خلال تسلسل منطقي نتيجة ضرورية انطلاقا من فرضيات معينة.

مثال أساسي: A يتستلزم B

من A إذا B

الاستنتاج: يستخدم خاصية عامة في هذا البناء.

الاستقراء: يحاول العثور على خاصية عامة (انطلاقا من الجزئيات) للوصول للخلاصة. **السلسة الاستنتاجية** إنها سلسلة من الجمل التي يمكن أن تكون كما في النموذج

التخمين.

نتيجة مفروضة على أنها صحيحة، ولكن لم يتم إثباتها بعد. تسمى التخمين

ملاحظة.

- كتابة البرهان تقتضي ترجمة الحجج والتفسيرات إلى الإطار النظري، وبناءها على الشكل الاستنتاجي.
- البحث عن البرهان في مشكلة ما (ليس تمرين مباشرة)، اكتشاف الحجج، يمر بعدة طرق، أهمها:
  - ❑ استخدام الاستقراء (فحص الحالات الخاصة، من أجل إيجاد قانون عام).
  - ❑ تغيير إطار المشكلة.

(إطار هندسي نحو الإطار الجبري أو التحليلي مثلا).

لاستخدام أدوات الإطار الجديد (تصبح المشكلة حل المعادلة، على سبيل المثال، إذا تمت ترجمتها جبريًا).

- **البرهان:**

حجة خاصة له المميزات التالية:

- السمة الاجتماعية: الحجة الوحيدة المقبولة من قبل هيئة علماء الرياضيات.
- الصفة الشكلية:
- السمة النظاريتية: يستعمل النظريات

1- بعض أنواع الاستدلال في الرياضيات

1- الاستدلال بمثال مضاد.

إذا أردنا أن نثبت أن قضية من النوع « $\forall \in E, P(x)$» صحيحة ، إذا من أجل كل x من E يجب أن نبين أن $P(x)$ صحيحة.

من ناحية أخرى، لإثبات أن هذه القضية خاطئة، يكفي أن نجد $E \ni x$ بحيث $P(x)$ خاطئة.

إيجاد مثل هذا x هو إيجاد مثال مضاد للقضية «$\forall \in E,\ P(x)$».

يستخدم الاستدلال بواسطة مثال مضاد النظرية التالية:

[يوجد x بحيث$\overline{p(x)}$] <=> لا [من أجل كل x ، $P(x)$]

أمثلة. اختبر صحة القضايا

- إذا كان (u_n) و (v_n) متتاليتان ليس لهما نهاية ، فإن المتتالية $(v_n.u_n)$ ليس لها نهاية
- هل التخمين التالي صحيح؟ $\ll \forall n \in \mathbb{N}: n^2 + n + 41$ est premier $\gg$.
- (f قابلة للإشتقاق عند العدد α بحيث $f'(\alpha) = 0$)$\Leftrightarrow$(f تقبل قيمة حدية عند α)
- (كل عدد طبيعي هو مجموع لثلاثة مُربعات).

2- الاستدلال بالخُلف.

الاستدلال بالخلف يقتضي الانطلاق من عكس ما نريد أن نثبته باعتباره صحيح، ثم عن طريق الاستنتاجات المنطقية (باستخدام الفرضية) لتؤدي إلى تناقض.

مبدأ الاستدلال بالخلف لإثبات أن القضية P صحيحة. نفترض أن القضية (لا P) صحيح (أي أن القضية P خاطئة)، ثم نثبت أن هذه الفرضية تؤدي إلى تناقض.

أمثلة.

- إثبات أن الصفر ليس له مقلوب.
- إثبات أن $\sqrt{2}$ ليس عدد ناطق.

– أثبت أن مجموعة الأعداد الأولية ليست منتهية.

3- الاستدلال المباشر

نريد أن نثبت أن القضية "$P \Rightarrow Q$" صحيحة. نفترض أن P صحيح و نثبت أن Q صحيحة.

إنها الطريقة الأكثر استخدامًا.

ملاحظة: إذا كانت P خاطئة، فإن القضية "$P \Rightarrow Q$" صحيحية، بغض النظر عن قيمة الحقيقية لـ Q.

أمثلة.

– بيّن أن $\forall n \in Z,\ 16n^2 - 48 + 33 \in N$.

– بيّن أن: $\forall x \in \mathbb{Q}^+, \exists n \in \mathbb{N}^*\ n > x$

–ليكن $P(n) = n^2 + 7n + 12$ عندئذ لا يوجد أي عدد طبيعي بحيث:

$$\sqrt{P(n)} \in \mathbb{N}$$

4- الاستدلال بـ: فصل الحالات (أو حالة بحالة)

لتكن الخاصية $P(x)$ المعرفة على المجموعة E، وليكن A جزء من E لإثبات صحة القضية:

«$\forall x \in E,\ P(x)$».

نثبت صحة هذه القضية من أجل كل x من A. ثم نثبت صحتها بالنسبة لجميع العناصر x التي لا تنتمي إلى A.لاحظ أن: $E = A \cup \bar{A}$

أمثلة.

n عدد طبيعي. أثبت أن العدد الطبيعي $n(n^2 - 1)$ مضاعف للعدد 3.

– أثبت أن:

$$max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 :$$

– حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة:

$$\sqrt{x - 1} \geq x - 4$$

5–الاستدلال عن طريق العكس النقيض.

يسمح الاستدلال بالعكس النقيض بإثبات أن الاستلزام $(P \Rightarrow Q)$ صحيح. يعتمد هذا الاستدلال على التكافؤ التالي:

القضية $(P \Rightarrow Q)$ تكافئ $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$

لذا إذا أردنا إثبات القضية "$P \Rightarrow Q$"، فنحن في الواقع نبين أنه إذا كانت $\neg Q$ صحيحة فإن $\neg P$ صحيحة.

ملاحظة: في بعض الأحيان يكون من العملي إثبات: $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ أجدى من $P \Rightarrow Q$

أمثلة

- n عدد طبيعي. أثبت أن: (n فردي $\Rightarrow$ n^2 فردي)
- أثبت أنه أذا كان : $2^n - 1$ أولي فإن n أولي.

6-الاستدلال بالتراجع (الاستقراء الرياضي).

1. الاستدلال بالتراجع البسيط.

لتكن الخاصية $P(n)$ المتعلقة بالعدد الطبيعي n. لإثبات صحة القضية:

$$n \geq n_0, \qquad P(n)$$

الاستدلال بالتراجع يسمح لنا بإثبات أن هذه القضية صحيحة. يجري هذا الإثبات على مرحلتين يليها استنتاج:

1. الإنطلاق:

>> الانطلاق يكون من n_0، نتحقق من أن $P(n_0)$ صحيحة>>

1. التدريج:

>> نثبت أنه من أجل: $k > n_0$، فإن الاستلزام $(p(k) \Rightarrow p(k+1))$ صحيح).

2. الخلاصة:

من النقطتين السابقتين، نستنتج أن القضية المعطاة صحيحة.

مثال 1.

- أثبت أن:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

– أثبت أن:

$$\forall n \in \mathbb{N}: (1+x)^n \geq 1+nx$$

x عدد حقيقي موجب معطى.

2. التراجع (القوي) المتعدد:

ليكن q عددًا صحيحًا غير معدوم و$\mathrm{(n)}$ خاصية معرفة من كل عدد طبيعي $\mathrm{n \geq n_0}$.

– إذا كانت القضايا $P(n_0)$ ، $P(n_0+1)$،$P(n_0+2)$ ، ... ، $P(n_0+q-1)$ صحيحة. و الاستلزام الآتي صحيح:

$$\left(p(n) \text{ و } p(n+1) \text{ و} \ldots \text{ و } p(n+q-1) \Longrightarrow p(n+q)\right)$$

تكون عندئذ القضية:

$$\forall n \geq n_0,\ P(n) \text{ صحيحة}$$

مثال.

1– لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 2, u_1 = 3$ و العلاقة التراجعية التالية:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

– أثبت أن الحد العام لهذه المتتالية يكتب بالشكل:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 2^n + 1$$

7– الاستدلال بالتحليل والتركيب

- **مرحلة التحليل:** نفرض أن للمسالة حل. ثم نحاول تجميع العناصر الأساسية التي لها دور الأداة، ثم تُستنتج الخصائص والشروط الضرورية للحل، مع مناقشة عدد الحلول.
- **مرحلة التركيب:** نعتبر الكائن المُعرف في جزء التحليل سابقا، ونتحقق من أنه يحقق الخصائص المطلوبة (وهذا يضمن الوجود) . ثم نتحقق مما إذا كانت الخصائص المكتشفةً سابقا كافية ليكون الشكل حلا للمسألة.

مثال.

أثبت أن كل دالة معرفة ومستمرة من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ يمكن تفكيكها إلى مجموع دالتين إحدهما زوجية والأخرى فردية.

تطبيقات حول البرهان الرياضي

1- استنتج تلميذ النتيجة التالية:

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots$$
$$B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

لدينا:

$$2A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

مما يعني أن

$$2A = A + B$$

ومنه النتيجة $A = B$

حلل الخطوات المنطقية التي اتبعها التلميذ.

2-

- أوجد بشكل منطقي الحد الناقص في حدود كل متتالية من المتتاليات التالية (مع إعطاء القانون العام):

$2; 5; 4; 7; 6; \ldots$ $\quad$ $5; 24; 123; 622; 3121; \ldots$ $\quad$ $2; 2; 3; 5; 14; \ldots; 965$

- يلعب الاستدلال في كلا من شقيه: الاستقراء والاستنتاج دورا مهما في التعليم الثانوي في تطوير التفكير لدى التلميذ. اشرح ذلك.

3- أثبت أحد التلاميذ لزملائه باستعمال التراجع أن:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{R}^*, a^{n-1} = 1 \qquad (*)$$

1. من أجل $n = 1$ العلاقة $(*)$ محققة
2. نفرض أن $(*)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي $k \leq n-1$ ونثبت صحتها من أجل $k+1$

لدينا : $a^{k-1} = 1$ من أجل $k \leq n-1$. ولكن من جهة أخرى لدينا:

$$a^k = \frac{a^{k-1} \times a^{k-1}}{a^{k-2}} = \frac{1 \times 1}{1} = 1$$

من 1 و2 نستنتج أن العلاقة $(*)$ صحيحة.

4- من أجل كل عدد طبيعي n و $x \geq 0$ ، أثبت أن:

$$e^x \geq \sum_{i=1}^{i=n} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

5- من أجل كل عدد طبيعي $n > 1$، نفرض أن:

$$H_n = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{k}$$

أثبت أن العددH_n لا يمكن أن يكون عددا طبيعيا.

[إرشاد: أثبت بالتراجع القوي أن H_n هو حاصل قسمة عدد فردي على عدد زوجي، مميزا الحالة أين يكون n زوجي والحالة التي يكونn فردي]

6- أثبت أن $sin10^0$ هو عدد أصم.

7- تكلم بإيجاز عن أهمية البرهان في الرياضي وعما يميزه عن غيره. قدم بعض الحجج غير المقبولة في الرياضيات.

لتكن المعادلة:

$$x^5 + x - 10 = 0$$

أثبت أن هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا حقيقيا، هل يمكن أن يكون هذا الحل ناطق؟ تكلم عن أهمية الاستدلال المستعمل

8- لكي يختار حاكم وزيرا من بين ثلاثة مترشحين A، B، C أخضهم للاختبار التالي:

وضع على رأس كل مترشح كرة ملونة حيث لا يمكن أن يراها، لكن يرى الكرتين الواقعتين على رأس كلا من زميليه. كما أن المترشحين يعلمون أن الكرات الثلاثة مأخوذة من بين 5 كرات ثلاثة منها سوداء والباقي بيضاء. أول المترشحين الذي يكتشف لون الكرة التي على رأسه يعين وزيرا وإن أخطأ يقتل.

شاهد المترشح Aكرة سوداء على رأس كلاً من زميله، فقال وهو واثقٌ من نفسه وخاصة عندما لم يتكلم أحدٌ منهما<< **على رأسي كرة سوداء**>> اشرح استدلال هذا المترشح.

9- نضع من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أويساوي 1 الخاصيةP_n التالية:

<<إذا كانت المقلمة تحتوي على أقلام n ، فإن الأقلام n كلها من نفس اللون>>.

لنبرهن بالتراجع أن: صحيحة $\forall n \geq 1, P_n$

بالنسبة إلى $n = 1$ ، يكون P_1 صحيحًا نظرًا لوجود قلم واحد فقط.

نفترض أن P_n صحيحة ، ونبرهن أن P_{n+1} صحيحة أيضًا.

لنأخذ مقلمة بها $(n + 1)$ قلم رصاص، ننزع واحد منها، لذلك تبقى n والتي لها نفس اللون من خلال فرضية التراجع.

نزيل قلم آخر من المقلمة، ثم نعيد الأول مرة أخرى: هناك مرة أخرى n قلم: وبالتالي فهي من نفس اللون.

لذا فإن أول قلم تمت إزالته له نفس لون القلم الآخر.

إذن P_{n+1} صحيحة.

وأخيرا فإن: صحيحة $\forall n \geq 1, P_n$

حلل هذا الاستدلال.

2- الانشاءات الهندسية

مقدمة.

بين القرنين الرابع والخامس قبل الميلاد، أنشأ الفيلسوف أفلاطون، أكاديميته المشهورة، مدرسة للفلسفة والعلوم من خلال الدیالكتيك (فنّ الحوار والجدل) والاستدلال الاستنتاجي، وكان أفلاطون يعتبر أن الوصول للحق والفضيلة له شروط أربعة:

- الإلمام بالهندسة.
- الإلمام بعلم النجوم
- الانسجام الداخلي (ويُحصل عليه عن طريق الموسيقى).

تحقيقا لهذه الغاية، في الهندسة، تُرفضْ أدوات القياس باستثناء **المسطرة (غير المُدرجة) والمدور**. كان أفلاطون يعتبر بأن الدائرة التي نرسمها لا تمثل سوى انعكاس باهت للحقيقة الموجودة في فكر العالم الرياضي. لماذا المسطرة والمدور؟ ربما لأنهما، الأدق تقريبيا (الأدوات الأكثر دقة). وقد يكون أيضًا تفضيل أفلاطون لهاتين الأداتين كان مدفوعًا بأسباب أخرى كثيرة، بعضها فلسفي.
لكن تاريخ الإنشاءات الهندسية يعود إلى أبعد من أفلاطون. استقرت مدرسة فيثاغورث، على وجه الخصوص، في جنوب إيطاليا (الحالية) في القرن السادس قبل الميلاد. وألف العديد من الإنشاءات الهندسية، والتي كانت واحدة من الوسائل المفضلة لدراسة الأرقام في وقت لم يتم فيه اختراع الشكلية الجبرية الحالية. وبالتالي، ربما كانوا الأوائل ممن أثبتوا أن $\sqrt{2}$ غير ناطق، بطريقة هندسية.

بعد قرن من الزمان، وضع أقليدس أسس الهندسة في كتابه **الأصول** (13 مقالاً). طور على وجه الخصوص مشاكل الإنشاءات الهندسية.

عموما:

- الرياضيون القدماء يعتبرون أن الإنشاء الهندسي السليم هو ذلك الذي يتم بواسطة المسطرة والمدور أو بهما معًا.
- إن كل الإنشاءات الهندسية المدروسة في كتاب أقليدس، منذ بداية القرن 3 قبل الميلاد، تنجز بواسطة المسطرة غير المُدرجة والمدور.

كان الاعتقاد السائد لدى الإغريق أن كل المسائل الهندسية يمكن حلها بواسطة المسطرة والمدور. غير أنه ظهرت حوالي القرن 5 قبل الميلاد، مسائل في الهندسة استعصى حلها بواسطتهما، فنالت شهرة واسعة (تربيع الدائرة، تضعيف مكعب، تثليث زاوية)[1].

[1] – من المسائل العويصة التي حيرت رياضي اليونان... والعرب والتي لم تجد حلا لها إلا بعد القرن 18 الميلادي على إثر التطور الذي شهده الجبر بعد أعمال Wantzel, Gauss, Galois، حيث بُرهن على استحالت حل المسألتين الأولى والثانية والمسألة الثالثة تقبل حلولا، في حالات خاصة.

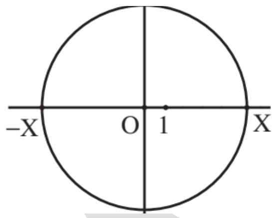
1 .1 الأعداد القابلة للإنشاء

تعطى الوحدة 1. ما هي الأعداد القابلة للإنشاء؟

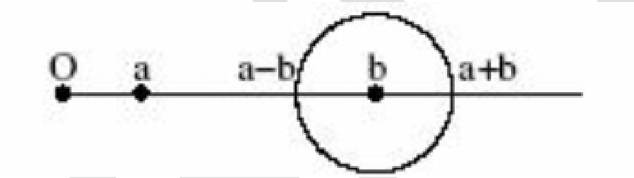
تعريف: يقال أن العدد x قابل للإنشاء، عند اختيار وحدة، يمكننا إنشاء بمساعدة المسطرة والمدور وحدهما، قطعة مستقيم طولها x.

تعريف مكافئ: ليكن $(O ، \vec{i})$ مستقيم مُدرج. العدد x قابل للإنشاء، إذا استطعنا بمساعدة المسطرة والمدور، أن نضع النقطة التي فاصلتها x على هذا المعلم.

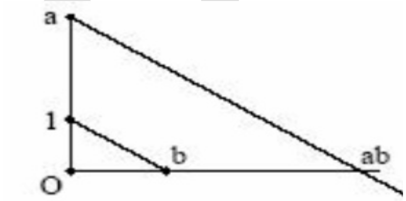
- نظير العدد x(القابل للإنشاء)، قابل للإنشاء.



- يمكن التحقق بسهولة من أنه إذا كان a و b عددين قابلين لإنشاء، فسيكون مجموعهما(فرقهما) كذلك.

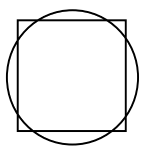


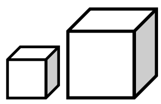
- حاصل ضرب عددين قابلين للإنشاء هو عدد قابل للإنشاء (استخدام نظرية طاليس)

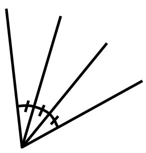


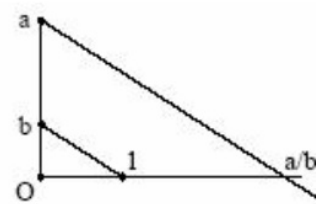
- حاصل قسمة عددين قابلين للإنشاء هو عدد قابل للإنشاء$(b \neq 0)$ (استخدام نظرية طاليس)

تربيع الدائرة: إنشاء مربع مساحته تساوي مساحة دائرة معلومة. **تضعيف مكعب:** إنشاء مكعب حجمه ضعف حجم مكعب معلوم. **تثليث زاوية:** بواسطة المدور ومسطرة غير مدرجة تقسيم زاوية معلومة إلى ثلاث أقسام متقايسة.

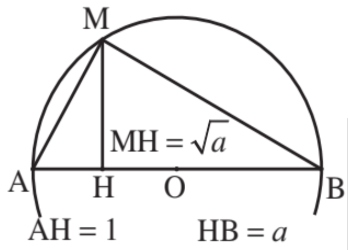


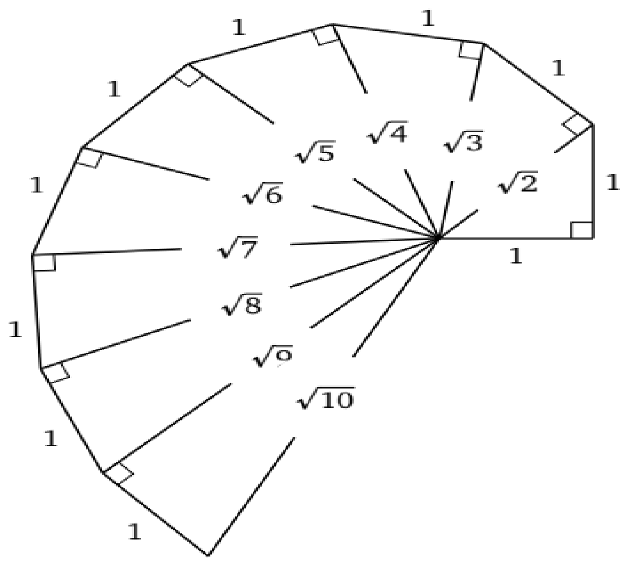






- إذا كان $a \geq 0$ عددا قابلاً للإنشاء، فإن $\sqrt{a}$ قابل للإنشاء.



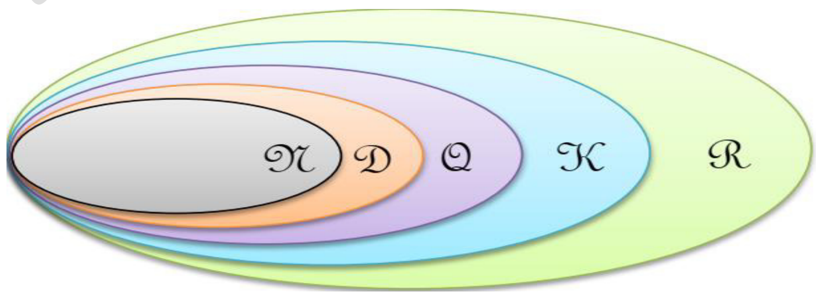


نظرية1.

- مجموعة الأعداد الطبيعية قابلة للإنشاء.
- مجموعة الأعداد الكسرية قابلة للإنشاء.

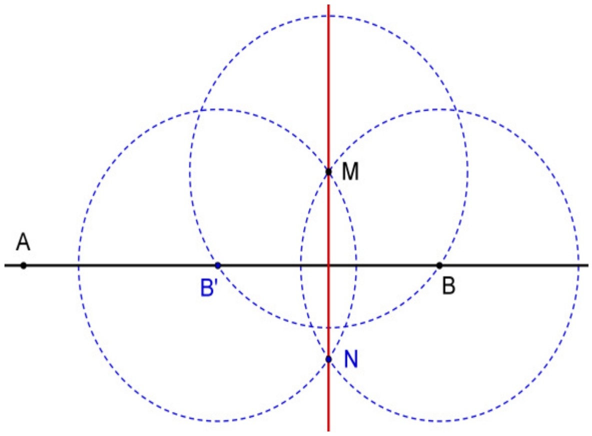
نظرية2.

مجموعة الأعداد القابلة للإنشاء $\mathcal{K}$ هي حقل جزئي من حقل الأعداد الحقيقية، مستقر بالنسبة للجذر التربيعي$(0 \geq a)$.



2-إنشاء اشكال هندسية.

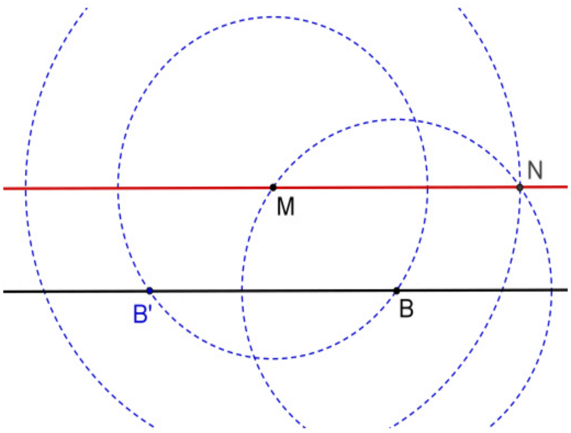
- أنشئ المستقيم العمودي لمستقيم معلوم(AB) ويشمل النقطة M.



1. ننشئ الدائرة التي مركزها M والتي تمر بالنقطة B.
(على سبيل المثال)
2. تتقاطع هذه الدائرة مع (AB) في 'B.
3. ننشئ الدائرتين المتمركزتين في B و'B وتشملان M.
4. تتقاطع هاتين الدائرتين في N . المستقيم المطلوب هو (MN).

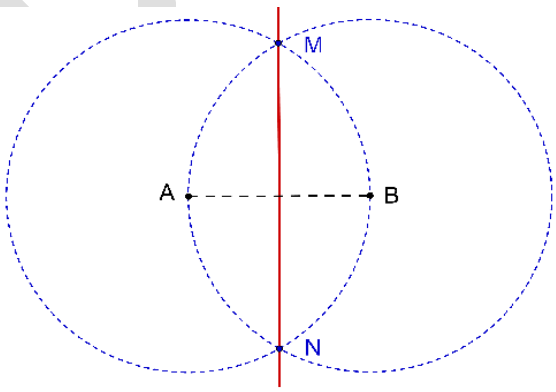
- أنشئ المستقيم الموازي لمستقيم معلوم(AB) ويشمل النقطة M.

ط1: باستخدام الإنشاء السابق مرتين، لأن العمودي على(MN) في M موازٍ لـ (AB).

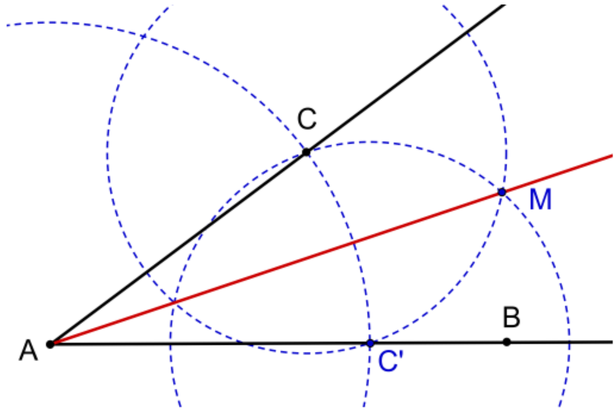


ط2: 1. ننشئ الدائرة التي مركزها M والتي تمر بالنقطة B.
(على سبيل المثال)
2. تتقاطع هذه الدائرة مع (AB) في 'B.
3. ننشئ الدائرة (C_1) ذات المركز M ونصف القطر 'BB.
4. ننشئ الدائرة (C_2) ذات المركز B نصف القطر B'M.
5. في نصف المستوي المحدود بـ (AB) الذي يشمل M، تتقاطع الدائرتين (C_1) و (C_2) في N. الموازي المطلوب هو (MN).

- أنشئ محور القطعة [AB].

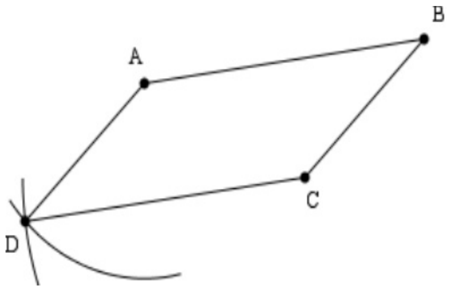


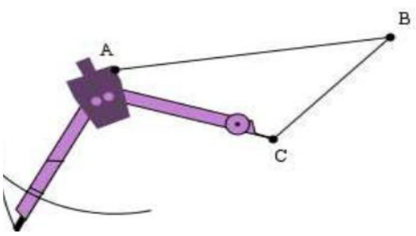
- أنشئ منصف زاوية معلومة.



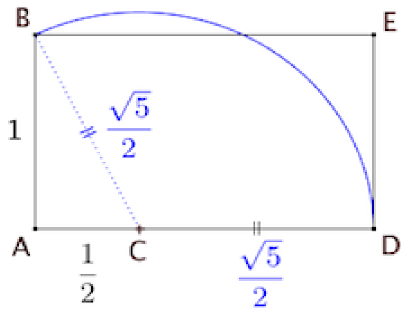
– أنشئ متوازي أضلاع.

بدءًا من ثلاث نقاط A، B، C ليست على إستقامة واحدة، فإن الرأس الرابع D للمتوازي الأضلاع ABCD هو نقطة تنشئ من { A، B، C} بواسطة المدور. يمكننا بسهولة إنشاء متوازيات الأضلاع باستخدام فتحتي مدور فقط. لنعطي ثلاث نقاط A، B، C. نقيس المسافة AB، ونرسم دائرة متمركزة في C ونصف قطرها AB. ثم نقيس المسافة BC ونرسم الدائرة C' المتمركزة في A ونصف القطر BC. تتقاطع هاتين الدائرتين عند نقطتين، إحداها D، فيكون ABCD متوازي الأضلاع.





تطبيقات:



- أنشئ قطعة مستقيم طولها العدد الذهبي [2]: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

لإنشاء العدد الذهبي، نبدأ بإنشاء المثلث ABC القائم في A . بحيث طول ضلعيه القائمين هما: 1 و $\frac{1}{2}$. ثم ننقل طول الوتر إلى النصف الأيمن (AC) (انظر الشكل المقابل). من السهل ملاحظة أن الطول AD للمستطيل ABED يساوي العدد الذهبي.

– [2] العدد الذهبي هو الحل الموجب للمعادلة: $x^2 = x + 1$. يتم تقسيم القطعة $[AB]$ وفقًا للقسم الذهبي أو النسبة الذهبية(العجيبة) إذا كانت:

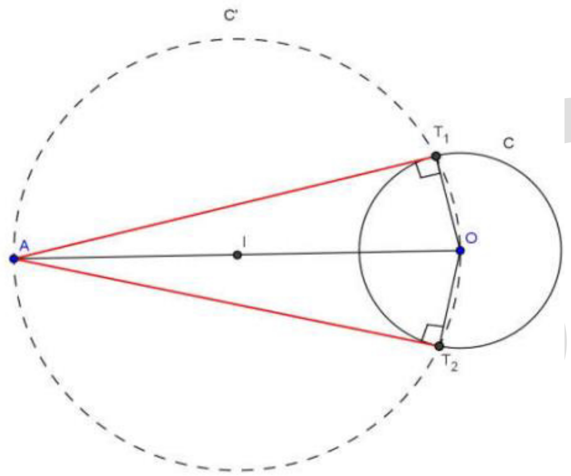
$$\frac{x}{a} = \frac{a}{x-a}$$

$$\frac{AB}{AM} = \frac{MB}{AM}$$

- تعطى دائرة C مركزها O ونقطة A خارجها. أنشئ المماس للدائرة C الذي يشمل A .

تحليل المسألة[3]:

لنفترض أن للمسألة حل ثم نحلل الشكل الذي تم الحصول عليه:



المثلثان $A\ OT_1$ و $A\ OT_2$ قائمين في T_1 و T_2. وفقا لنظرية الزاوية القائمة(المثلث المرسوم في نصف دائرة قائم، والعكس)، تنتمي النقطتان T_1 و T_2 إلى الدائرة C' التي قطرها $[OA]$، بالإضافة إلى ذلك، تتواجد T_1 و T_2 على الدائرة C.

التركيب:

ننشئ النقطة I منتصف $[OA]$ برسم محور القطعة$[OA]$

نرسم الدائرة C' التي مركزها I وتشمل A فتقطع C في نقطتين T_1 و T_2. فسيكون حتما المثلثين $A\ OT_1$ و $A\ OT_2$ قائمين في T_1 و T_2. نستخلص من ذلك أن:

(AT_1) و (AT_2) مماسين للدائرة المطلوبة يشملان النقطة A.

- α, β طولين مفروضين، أنشئ قطعة مستقيم طولها الوسط المتناسب لـ: β و α.

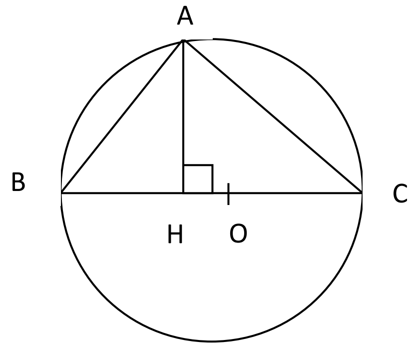
[3] – وهو نمط من أنماط الاستدلال "التحليل والتركيب" مرتبط كثيرا بالإنشاءات الهندسية.

مرحلة التحليل: نفرض أن للمسألة حل. ونرسم شكلا موافقا. ثم نحاول تجميع العناصر الأساسية التي لها دور الأداة، ثم تُستنتج الخصائص والشروط الضرورية للحل، مع مناقشة عدد الحلول.

مرحلة التركيب: نعتبر الكائن المُعرف في جزء التحليل سابقا، ونتحقق من أنه يحقق الخصائص المطلوبة (وهذا يضمن الوجود) . ثم نتحقق مما إذا كانت الخصائص المكتشفةً سابقا كافية ليكون الشكل حلا للمسألة.

$HB=\alpha, HC=\beta$ بوضع: $AH^2 = HB \times HC$ لدينا: $AH = x$: نضع ، $\frac{x}{\beta} = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow x^2 = \alpha\beta$

نجعل H بين B و C، ونرسم الدائرة التي قطرها $[BC]$ ، ننشئ العمودي من H يقطع الدائرة في A .



• أنشئ قطعتي مستقيم علم مجموع طوليها وجُدّاءها. بعد مناقشة الحالة العامة نأخذ: $S = 8, P = 9$

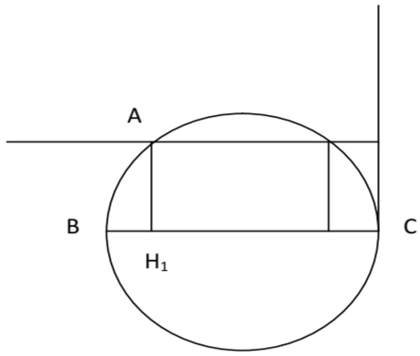
جبريا المسألة تؤول إلى حل المعادلة:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

نضع $\alpha = HC$ ، $\beta = HB$ هما طولي القطعتين المفروضتين. حيث تقع H بين النقطتين C و B .

$$\alpha + \beta = BC = HB + HC. \quad \alpha \times \beta = HB.HC$$

ننشئ الدائرة التي قطرها $[BC]$، ثم نرسم نصف المستقيم $[CR)$ (العمودي على القطر)، نأخذ عليه طول قدره $CE = \sqrt{P}$. ثم ننشئ الموازي لـ: (BC) انطلاقا من E فا في الحالة التي يقطع فيها الدائرة في نقطتين، نسمي مسقطيهما على (BC) : H_1، H_2. وهما جواب المسألة: CH_1, BH_1 . لدينا $AH_1^2 = H_1B.H_1C$.



مناقشة:

- في حالة ما إذا قطع الموازي الدائرة في نقطتين: $P < \frac{S^2}{4}$ [وجود الحل]
- في حالة ما إذا قطع الموازي الدائرة في نقطة واحدة : $P = \frac{S^2}{4}$ [للقطعتين نفس الطول]
- عدم وجود تقاطع في الحالة: $P > \frac{S^2}{4}$ [عدم وجود الحل]

كمثال نأخذ $S = 8, P = 9$ وهي الحالة المصادفة لوجود حلين

ننشئ الدائرة التي قطرها 8 وبالتالي نصف قطرها 4 وهو أكبر من $\sqrt{P} = 3$، ثم ننشئ الموازي لـ: (BC) انطلاقا من E التي تبعد عن C بمسافة 3 فيقطع الدائرة في نقطتين، نسمي مسقطيهما على (BC) : H_1، H_2. وهما جواب المسألة.

- أنشئ مثلث قائم حيث طول المتوسط $m = 4\text{cm}$ وطول والارتفاع $h = 3\text{cm}$ المتعلق بالوتر.

الأدوات المستخدمة في التمرين:

✓ خصائص وتعريف كلّ من المتوسط والارتفاع.

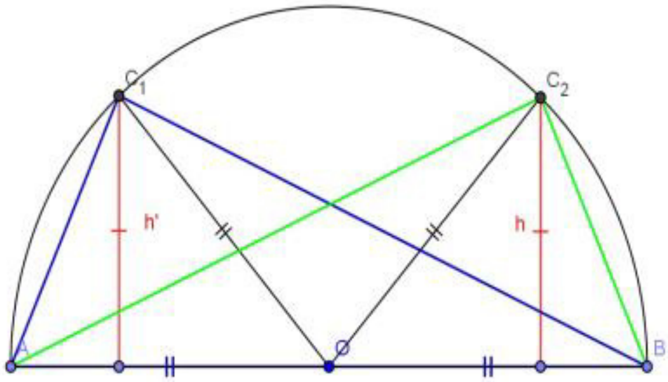
✓ خاصية الدائرة المحيطية بمثلث قائم

نعلم أن المتوسط المتعلق بالوتر [AB] يساوي نصف الوتر. نضع النقطة O على [AB] بحيث:

$$OA = OB = m$$

تقع النقطة C على الدائرة التي قطرها [AB] على مسافة h من (AB).

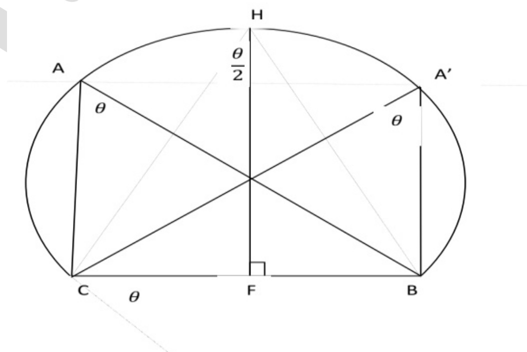
المسألة تقبل الحلول إذا كان $h \leq m$. في هذه المسأله تقبل حلين(مثلثين).



- أنشئ مثلث ABC، عُلِم فيه: قَيس زاوية رأسِهِ $\theta = \hat{A}$ ، وارتفاعه $h = AD$، وقاعدته $BC = \alpha$. ناقش وجود هذا المثلث

نأخذ مثلا: $BC = 6cm,\quad \theta = 60^0,\ h = 4cm$.

لدينا $\overline{(AB, AC)} =$ ومنه A تنتمي إلى مجموعة النقط المعرفة بـ: $\overline{(MB, MC)} = \theta$



نرسم الموازي لـ (BC) فيقطع الدائرة (التي تحصر المثلثBHD) في نقطتينA و’A مثلا. إذا للمسألة حلين وهما المثلثتين BAC و ’BA’C .

نناقش وجود الحلول.

- في حالة $h = HF$ للمسألة حل وحيد
- في حالة $h > HF$ لا يوجد للمسألة حل.
- في حالة $h < HF$ للمسألة حلين.

يمنكن حساب HF كما يلي:

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{CF}{HF}$$

ومنه:

$$HF = \frac{CF}{tg\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

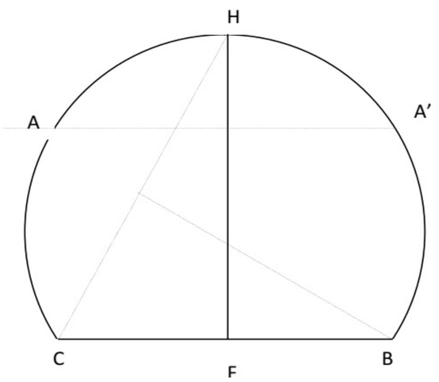
- في الحالة الخاصة التي لدينا: $BC = 6cm, \quad \theta = 60^0, \ h = 4cm$

لدينا:

$$HF = \frac{CF}{tg\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{3}{tg30} = 3\sqrt{3} > 4 = h$$

ومنه للمسألة حلين:

نرسم قطعة مستقيم $[BC]$ طولها $6cm$، ثم ننشئ محور هذه القطعة(Δ)، ولتكن منتصفها F. ننشئ الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها 6، فتقطع (Δ) في النقطة H.(الهدف الحصول على زاوية قيسها 60^0، رأسها H وقاعدتها$[BC]$). ننشئ الدائرة التي تشمل النقاط B , H وC.



ولذلك يكفي رسم المتوسط المتعلق بالضلع $[C]$، فنقطة تقاطعه مع (Δ) هو مركز الدائرة المطلوبة.

من على إرتفاع $4cm$، نرسم الموازي لـ (BC)الذي يقطع الدائرة الأخيرة في نقطتين A وA' .

المثلثين BAC و BA'C هما حلي المسألة.

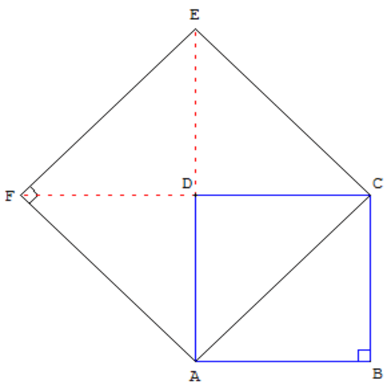
- أنشئ مربع بمساحة مضاعفة لمربع معين.

نقسم قطر "المربع الصغير" إلى مثلثين متساويي الساقين.

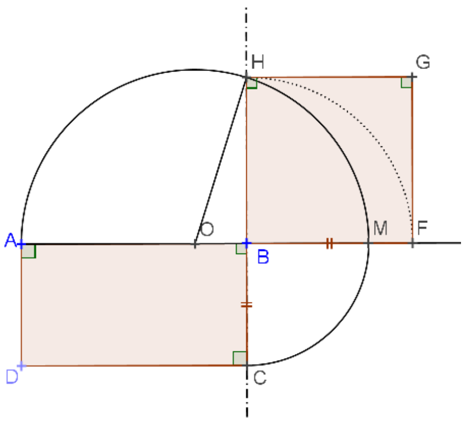
يتكون "المربع الكبير" من أربعة مثلثات متساوية الساقين وقائمة لها نفس المساحة.

نسبة مساحات المربعات إلى بعضها يساوي 2.

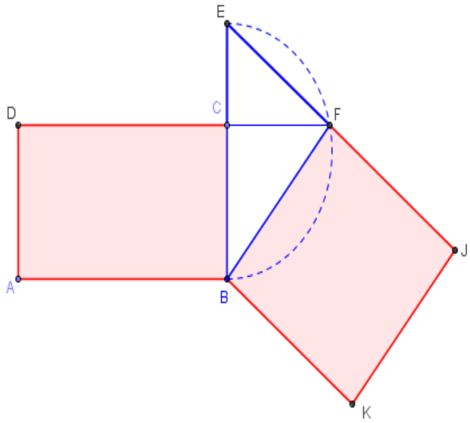
نسبة الأضلاع إلى بعضها هي $\sqrt{2}$



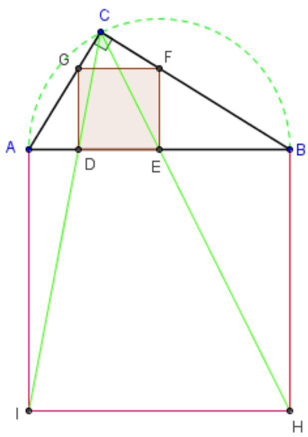
- أنشئ مربعا مساحته تساوي مساحة مستطيل معلوم.



ABCD مستطيل حيث AB أكبر من BC.
على نصف المستوي (AB]، نعلم النقطة M
بحيث يكون BM = BC ، ونمدد القطعة [AB].
ليكن O منتصف [AM] ، ثم نرسم نصف الدائرة
التي مركزها O وتمر من A.
– يتقاطع المستقيم (BC) مع نصف الدائرة في النقطة H.
– المربع BHGF له نفس مساحة المستطيل ABCD.



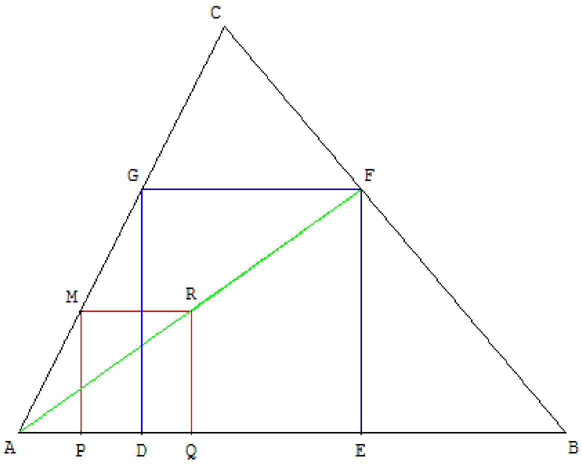
ط2.(باستعمال الوسط المتناسب)
من مستطيل ABCD، نمدد طول المستطيل [BC) إلى النقطة E
بحيث يكون BE = AB.
نمدد (DC] إلى F ونرسم نصف الدائرة التي قطرها [BE]
CF هو ارتفاع المثلث القائم BEF. في هذا المثلث، الضلع BF
للزاوية القائمة هو الوسط المتناسب للوتر ومسقطهُ عليه.
$BF^2 = BE \times BC.$



- أنشئ مربعا يحصُرُه مثلث ABC.

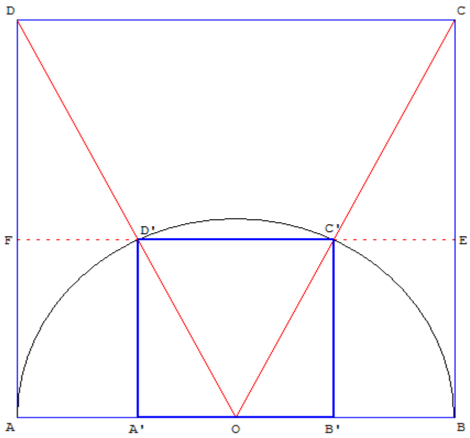
ننشئ المربع AIHB على الضلع $[AB]$ مثلا. (CI)يقطع$[AB]$ في D
(CH) يقطع$[AB]$ في E. DE هو طول المربع المطلوب.
[استعمال فكرة التحاكي. برر ذلك]

أو:
نرسم أي مربع MPQR رأسين منه على الضلع [AB] ورأس على [AC]
نوصل A إلى الرأس الرابع من هذا المربع ونمد المستقيم (AR)
حتى يقطع [BC]. ستكون نقطة التقاطع F هي أحد رؤوس
المربع المطلوب.
يكفي الرسم من F الموازي والعمودي لـ [AB] لإكمال رسم المربع.



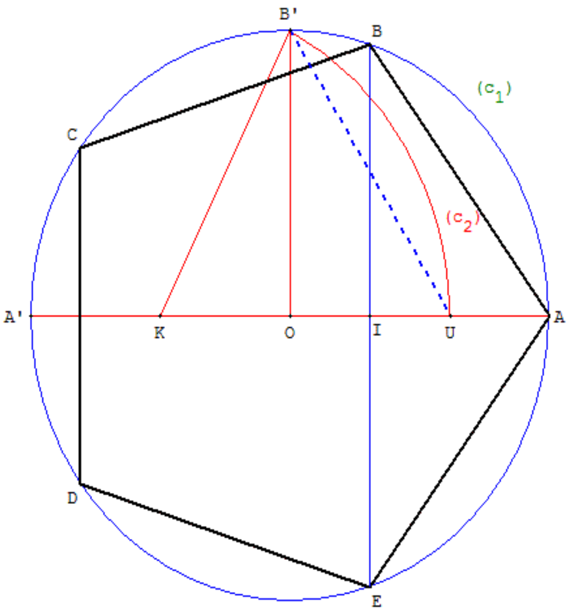
- أنشئ مربع محصور بين نصف دائرة وقطرها.

ننشئ مربع ضلعه [AB] قطر الدائرة، ونستخدم التحاكي الذي مركزه O منتصف [AB].



- إنشاء خماسي منتظم.

إنشاء خماسي محدب منتظم مرسوم في دائرة مركزها O ونصف القطر r، انطلاقا من رأس A معطى.



نرسم دائرة (C_1) مركزها O، تشمل A.

نختار نصف قطر الدائرة كوحدة.

ليكن قطر هذه الدائرة هو [AA’] ونصف القطر [OB’] العمودي على [AA’]. K هو منتصف [OA’].

دائرة "**بطليموس**" (C_2) التي مركزها K ونصف قطر KB’ تقطع [OA] في U.

$\frac{1}{\varphi} = \frac{OU}{OA}$ مقلوب العدد الذهبي:

النقطة U تقسم نصف القطر [OA] بهذه النسبة.

طول ضلع الخماسي يساوي B’U.

4. التقويم ومقاييس بناء اختبار

يفيد مصطلح التقويم لغةً:

- تقدير الشيء، وإصلاح اعوجاجه.

وفي المجال التعليمي: إصدار حُكم على مدى وُصُول العمليَّة التَّعليميَّة إلى أهدافها، وتحقيقها لأغْراضها، والكَشْف عن مختلف الموانع والمعيقات التي تَحُول دون الوُصُول إلى ذلك، واقتراح الوسائل المناسِبة من أجْل تلافِي هذه الموانع.

– أنواع التقويم.

1. التقويم القبلي (أو التشخيصي).

يهدف التقويم القبلي إلى تحديد مستوى المتعلم تمهيداً للحكم على صلاحيته في مجال من المجالات، فإذا أردنا مثلاً أن نحدد ما إذا كان من الممكن قبول المتعلم في نوع معين من الدراسات كان علينا أن نقوم بعملية تقويم قبلي باستخدام اختبارات القدرات أو الاستعدادات

فالتقويم القبلي يحدد للمعلم مدى توافر متطلبات دراسة المقرر لدى المتعلمين، وبذلك يمكن للمعلم أن يكيف أنشطة التدريس بحيث تأخذ في اعتبارها مدى استعداد المتعلم للدراسة. ويمكن للمعلم أن يقوم بتدريس بعض مهارات مبدئية ولازمة لدراسة المقرر إذا كشف الاختبار القبلي عن أن معظم المتعلمين لا يمتلكونها.

2. التقويم البنائي التكويني

وهو الذي يطلق عليه أحياناً التقويم المستمر، ويعرف بأنه العملية التقويمية التي يقوم بها المعلم أثناء عملية التعلم، وهو يبدأ مع بداية التعلم ويواكبه أثناء سير الحصة. العملية التقويميَّة التي يقوم بها المعلم أثناء عملية التعلُّم، وهو يبدأ مع بداية التعلُّم ويواكِبه أثناء سير الحصَّة الدراسية، وهي وسيلة يوظف المدرس للتحكم في العمليَّة التعليميَّة / التعلُّميَّة؛ أي: التحوُّل والتغيُّر الذي ينشأ أثناء التعلُّم.

ومن أساليبه:

- المُسألة
- الواجبات المنزلية
- حصص التقوية

والتقويم البنائي هو أيضاً استخدام التقويم المنظم في عملية بناء المنهج، في التدريس وفي التعلم بهدف تحسين تلك النواحي الثلاث وحيث أن التقويم البنائي يحدث أثناء البناء أو التكوين فيجب بذل كل جهد ممكن من أجل استخدامه في تحسين تلك العملية نفسها.

إن أبرز الوظائف التي يحققها هذا النوع من التقويم هي:

- توجيه تعلم التلاميذ في الاتجاه المرغوب فيه.
- تحديد جوانب القوة والضعف لدى التلاميذ، لعلاج جوانب الضعف، وتعزيز جوانب القوة.
- تعريف المتعلم بنتائج تعلمه، وإعطاؤه فكرة واضحة عن أدائه.
- إثارة دافعية المتعلم للتعلم والاستمرار فيه.
- تجاوز حدود المعرفة إلى الفهم، لتسهيل انتقال أثر التعلم.

– وضع برنامج للتعليم العلاجي، وتحديد منطلقات حصص التقوية.

3. التقويم الختامي أو النهائي ....

ويقصد به العملية التقويمية التي تجرى في نهاية حصة تعلمية أو محور معين أو فصل دراسي أو في نهاية برنامج تعليمي، يكون المفحوص قد أتم متطلباته في الوقت المحدد لإتمامها، والتقويم النهائي هو الذي يحدد درجة تحقيق المتعلمين للمخرجات الرئيسية لتعلم مقرر ما.

ومن الأمثلة عليه في مدارسنا ومؤسساتنا التعليمية الامتحانات التي تتناول مختلف المواد الدراسية في نهاية كل فصل دراسي وامتحان الثانوية العامة والامتحان العام لكليات المجتمع.

والتقويم الختامي يتم في ضوء محددات معينة أبرزها تحديد موعد إجرائه، وتعيين القائمين به والمشاركين في المراقبة ومراعاة سرية الأسئلة، ووضع الإجابات النموذجية لها ومراعاة الدقة في التصحيح.

الهدف من تنظيم الاختبارات

يحتاج المعلم دائماً إلى تقويم عمله التعليمي خلال الفصل الدراسي ونهايته. ومن وسائل التقويم التي يُعتمد عليها في الحكم على مستوى التلاميذ، الاختبارات للحكم على مستوى عمله، الاختبارات الفصلية والنهائية، تهدف إلى:

1 – قياس مستوى التحصيل، وتشخيص نقاط القوة والضعف لديهم.

2 –تصنيف الطلاب في مجموعات، وقياس مستوى تقدمهم في المادة.

3 – التنبؤ بأدائهم في المستقبل.

4 – الكشف عن الفروق بين الطلاب (الموهوبين، المتفوقين، العاديين، البطيئين)

5 – تنشيط دافعيه التعلم، والنقل من مستوى لآخر، ومنح الدرجات والشهادات.

الغرض من الاختبار.

قد يكون هدف الاختبار قياس تحصيل الطالب بعد الانتهاء من تدريس وحدة دراسية معينة، أو قياس التحصيل في نهاية الفصل الدراسي، أو قد يكون غرضه تشخيصياً لتحديد جوانب التأخر أو الضعف في موضوع أو موضوعات معينة في المنهج. وقد يكون هدف الاختبار تحديد المتطلبات السابقة للتعلم الجديد إلى غير ذلك من الأغراض المختلفة للاختبارات التحصيلية، لذا فإنه قبل أن يبدأ المعلم بإعداد الاختبار عليه أن يعرف ما يريده بالضبط، أي أن يحدد هدفه بوضوح. أما إذا لم يكن ثمة وضوح حول الغرض الذي يستخدم الاختبار من أجله فلا معنى حينئذ للنتائج المتحققة عنه.

ويرتبط الغرض من الاختبار بالزمن المتاح الذي يتقرر في ضوئه معا اعتبارات أخرى – ونوع وشكل وعدد الأسئلة التي يشتمل عليها.

مصداقية المعلم أثناء وضع الاختبار

يشترط في الاختبار الجيد أن يكون **صادقاً وثابتاً**، فالمعلم أثناء وضع الاختبار والتقويم إذا اعتبر من يعمل لهم الاختبار، أبناء له، فإنه حقاً سيكون صادقاً معهم، صدقه مع نفسه.

أن يبذل الجهد من أجل اختيار الأسئلة التي تعطي الانطباع الصادق عن مستوى تلاميذه دون تحدٍ لهم. ومن المعروف أن الاختبار لا يمكن أن يسأل عن كل أجزاء من المادة الدراسية. لذا فالاختبار الجيد يسأل عن عينة جيدة من المادة.

بعد أن يتم تحديد العناصر النهائية للاختبار يجب أن نتأكد من أن الاختبار تتوافر فيه الشروط والأسس العلمية وذلك عن طريق حساب معاملات الصدق والثبات والموضوعية حيث أن:

الصدق

يقصد به أن الاختبار يقيس ما أعد لقياسه ولا يقيس شيئاً آخر مختلفاً عنه. فالاختبار الذي أعد لقياس التحصيل في مادة معينة لا يجب أن يكون بين أسئلته أسئلة متعلقة بقياس الذكاء، فيتحول الاختبار إلى قياس للذكاء، أو أي مجال آخر لا يهدف الاختبار إلى قياسه. ويرتبط صدق الاختبار ككل بصدق كل سؤال فيه، والاختبار الصادق الذي يصلح للقياس على مجموعة معينة من الطلاب قد لا يكون صادقاً لمجموعة أخرى، كما أن تجريب الاختبار وتعديلة يرفع من درجة الصدق، ولتحديد معامل صدق الاختبار تستخدم إحدى الطرق التالية:

صدق المحتوى أو المضمون: أي مدى تمثيل الاختبار للجوانب المعني بقياسها.

الصدق التطابقي: أي مقارنة نتائج الاختبار التحصيلي الجديد بنتائج اختبار تحصيلي آخر يقيس النواحي والأغراض التي يقيسها الاختبار الجديد.

الصدق التنبؤي: أي قدرة الاختبار على التنبؤ بنتيجة معينة في المستقبل.

الثبات

يتصف الاختبار بالثبات إذا اعيد أجراؤه على نفس العينة وفي نفس الظروف وأعطى النتائج نفسها او نتائج قريبة من نتائج التطبيق الاول.

الموضوعية

يكون الاختبار موضوعيا إذا كانت علامة المفحوص مستقلة عن شخصية المفحوص أي لا يتأثر بجمال الخط او الترتيب او التسلسل المنطقي لعرض الأفكار.

مواصفات عامة لبناء اختبار مادة الرياضيات

1- تحديد الموارد (المعارف والسلوكيات) التي يجب تجنيدها.

2- تطابق تام مع البرنامج.

3- مسح جزء مقبول من البرنامج بتنويع الأسئلة ضمن مجالات البرنامج (انشطة عددية – أنشطة هندسية تنظيم معطيات والإحصاء).

4- صعوبة معقولة بحيث توجه الأسئلة للتلميذ.

5- طول معقول بما يناسب الوقت المخصص للاختبار.

6- التدرج في الصعوبة وتجنب الأسئلة الحاجزة.

7- عدم قياس نفس المعرفة عدة مرات.

8- خلو الموضوع من الأخطاء العلمية.

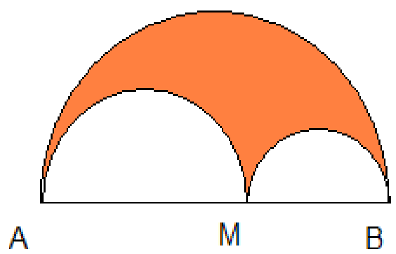
9- عدم المبالغة في عدد الأسئلة الفرعية الخاصة بكل تمرين.

الشـكل:

- صياغة الأسئلة بشكل بسيط، واضح، دقيق ولا يقبل التأويل.
- خلو الموضوع من الأخطاء اللغوية واحترام الترميز المعتمد .
- عدم المبالغة في استعمال الرموز الرياضية.
- الجدول والرموز واضحة ودقيقة.
- تضمن ورقة الاختبار على ظل المعلومات الضرورية (المدة، توزيع العلامات، التعليمات الخاصة باستعمال الآلة الحاسبة من عدمه).
- احترام مقاييس الكتابة المعتمدة وترقيم الصفحات.
- تهوية النص.

امتحان 2020-2021

1. بإيجاز اشرح المصطلحات التالية: **الحقل المفاهيمي، المعنى، المخطط، النظريات النشطة.**
2. كيف يمكن تقييم امتلاك التلميذ لمفهوم رياضي، مثلا: **مفهوم القيمة العظمى لدالة**. ماهي مختلف المخططات التي يمكن استحضارها للحصول على هذه القيمة بالنسبة لكثير حدود من الدرجة 2.
3. إليك هذا النشاط المقدم للسنة الأولى من التعليم الثانوي:



نعتبر نصف الدائرة(C) ذات القطر $[AB]$ حيث $AB = \rho$

لتكن M نقطة متغيرة من $[AB]$. ننشئ نصفي الدائرتين بقطرين

$[AM]$ و $[MB]$ كما في الشكل.

1. ما هي وضعية M على القطعة$[AB]$ بحيث تكون مساحة الشكل الملون أعظم ما يمكن؟
2. لتكن D النقطة من (C) بحيث M هي المسقط العمودي لها على $[AB]$.

قارن مساحة الشكل الملون بمساحة القرص الذي قطره $[MD]$

قدم حلا لهذا النشاط. ثم أجب عن الأسئلة التالية:

- ما هي الأدوات الضرورية للحل؟ حدد هدفا لهذا النشاط.
- ماهي الصعوبات التي يمكن أن يواجهها التلاميذ أثناء الحل؟
- اعط تصنيفا للمشكل المطروح.
- حدد القدرات والمهارات التي سينميها هذا النشاط عند التلاميذ؟
- عند تقديم هذا النشاط لمستوى أعلى من السنة الأولى ماهي في نظرك الأدوات الجديدة التي يمكن استخدامها في الحل.

الحل

بإيجاز اشرح المصطلحات التالية: الحقل المفاهيمي، المعنى، المخطط، النظريات النشطة.

الحقل المفاهيمي

– هي نظرية معرفية، من أجل "توفير إطار يسمح بفهم التمفصلات والقطائع بين المعرفة والمعرفة المعبر عنها" إنه يتعلق بفهم كيف يتم بناء المفاهيم من نشاط في الموضوع ما. يُكتسب المفهوم من خلال الوضعيات والمشكلات التي يحلها.

– فضاء من المشاكل أو وضعيات المشكل –التي ينطوي علاجها على عدة مفاهيم وسيرورات متصلة ببعضها، وكذلك التمثيلات اللغوية والرمزية التي يمكن استخدامها لتمثيلها.

المخطط «Schème»التنظيم الثابت الذي يقود لمعالجة عائلة من المشاكل". يجب أن تكون العناصر المعرفية التي تسمح بالنشاط في الموضوع عملية.

النظريات النشطة: هي جزء من المخطط، يمكن أن تكون صحيحة أو خاطئة؛ تشير إلى "خصائص العلاقات التي يتم كتابتها أو استخدامها من قبل الطالب في وضعيات حل المشكلات، وهذا لا يعني أنه قادر على شرحها أو تبريرها"؛ هي عبارة عن نمط من الخصائص.

المعنى: استحضار المخططات والنظريات النشطة العاملة.

كيف يمكن تقييم امتلاك التلميذ لمفهوم رياضي، مثلا: مفهوم القيمة العظمى لدالة. ماهي مختلف المخططات التي يمكن استحضارها للحصول على هذه القيمة بالنسبة لكثير حدود من الدرجة 2.

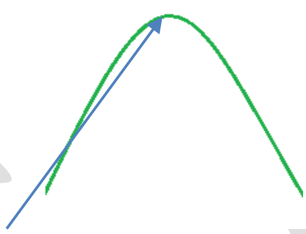
عن طريق التعميم والتمييز(الاستقراء) لدى الطفل وعن طريق الاستدلال لدى المراهق. ويمكن أن نلخص ذلك في:

1–التحديد والتصنيف: تحديد جميع الخصائص أو السمات المميزة له وتحديد مجموعة أشمل ينتمي إليها المفهوم.

2–المثال واللامثال: تقديم أمثلة تحقق المفهوم، تقديم أمثلة لا ينتمي المفهوم إليها (أمثلة عدم التحقق).

المخططات الواجب استحضارها لتعين قيمة عظمى لكثير حدود من الدرجة 2.

السنة أولى ثانوي



$$P(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

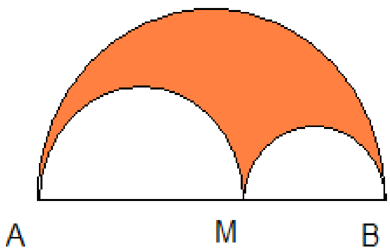
$a < 0 \rightarrow$

قيمة عظمى $\qquad P\left(\frac{-b}{2a}\right)$

السنة ثانية ثانوي فما فوق: استعمال فكرة انعدام المشتقة

4. – مساحة نصف القرص(C) ستكون إذا:

$$S = \frac{1}{8}\pi\rho^2$$



ومساحتي نصفي القرصين (C_1) و (C_2) هي على الترتيب:

$$S_2 = \frac{1}{8}\pi(\rho - x)^2 \ , \qquad S_1 = \frac{1}{8}\pi x^2$$

حيث: $x = AM$

مساحة الشكل الملون هي:

$$S' = S - (S_1 + S_2) = \frac{\pi}{8}(\rho^2 - (\rho - x)^2 - x^2) = \frac{\pi}{4}(-x^2 + \rho x)$$

اذا عبارة المساحة تتعلق بـ: x ، لنبحث عن القيمة العظمى للدالة :

$$S'(x) = \frac{\pi}{4}(-x^2 + \rho x)$$

وحسب السؤال السابق، وبمأن معامل x^2 سالب فإن $S'(x)$ تقبل قيمة عظمى الموافقة لـ:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}\rho$$

$$S'(\frac{1}{2}\rho) = \frac{\pi}{8}\rho^2$$

لتكن D النقطة من (C) بحيث M هي المسقط العمودي لها على $[AB]$.

بمأن D من (C) فإن المثلث ADB قائم في D ولدينا M هي المسقط العمودي لـ D على $[AB]$.وعليه نستنتج:

$$DM^2 = AM \times MB$$

ولدينا مساحة القرص الذي قطره $[MD]$ تعطى بالعلاقة:

$$S'' = \frac{\pi}{4}DM^2 = \frac{\pi}{4}AM \times MB = \frac{\pi}{4} \times x(\rho - x) = S'$$

النتيجة: $S'' = S'$

- **ما هي الأدوات الضرورية للحل؟**

مساحة قرص، خواص المساحات، القيمة العظمى لكثير حدود من الدرجة 2، المثلث المرسوم في نصف دائرة، العلاقات المترية في مثلث قائم، المقارنة.

- **حدد هدفا لهذا النشاط:** حساب مساحة شكل.
- **ماهي الصعوبات التي يمكن أن يواجهها التلاميذ أثناء الحل؟**

استنتاج مساحة الشكل، الخلط بين مساحة القرص ونصف القرص، مشاكل حسابية، عدم استحضار مخطط القيمة العظمى، الحساب الحرفي، بعض النظريات النشطة (العلاقات المترية في مثلث قائم).

- **اعط تصنيفا للمشكل المطروح:** مشكل تطبيقي.
- **حدد القدرات والمهارات التي يمكن أن ينميها هذا النشاط عند التلاميذ؟**

تحليل شكل، إعادة الرسم، تحليل المعطيات، تطبيق القواعد الحسابية في وضعيات مختلفة، ربط الحساب بالهندسة والتحليل (دمج المكتسبات).

- **عند تقديم هذا النشاط لمستوى أعلى من السنة الأولى ماهي في نظرك الأدوات الجديدة التي يمكن استخدامها في الحل.**

استغلال مفهوم المشتق في البحث عن القيمة العظمى.

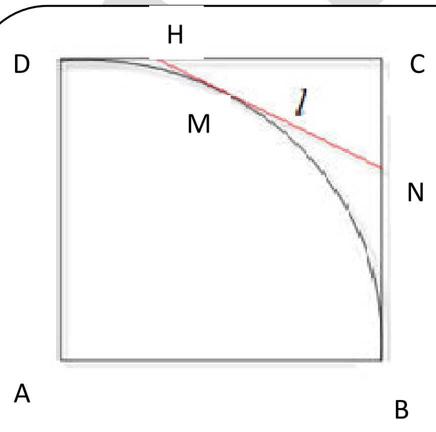
امتحان 2021–2022

التمرين1.

1) عرف **الحقل المفاهيمي** مبينا هدفه، ثم اشرح المصطلحات التالية: **المخطط، النظريات النشطة.**

2) عرف المفهوم عموما، ثم بين كيف يمتلك التلميذ مفهوم رياضي ما، مثلا: **مفهوم الدالة**. ماهي أهم المخططات التي يمكن استحضارها للتحكم في هذا المفهوم.

3) إليك المشكل التالي:



ABCD مربع طول ضلعه 1. الدائرة (C) مركزها A ونصف قطرها 1.

M نقطة متغيرة من ربع الدائرة BD تختلف عن كلا من D و B.

مماس (C) عند M يقطع كلا من $[CD]$ و $[CB]$ على الترتيب في H و N

كما في الشكل.

- ما هي وضعية M بحيث تكون المسافة $l = NH$ أصغر ما يمكن.

قدم حلا لهذا المشكل. ثم أجب عن الأسئلة التالية:

- ما هي الأدوات أو المفاهيم التي تساعد في الإجابة؟

- ماهي الصعوبات التي يمكن أن يواجهها التلاميذ أثناء الحل؟
- اعط تصنيفا للمشكل المطروح.
- ما هو المستوى المفضل في التعليم الثانوي الذي يمكن تقديم فيه هذا التمرين

التمرين2.

ثلاث أعداد حقيقية موجبة. a, b و c

أثبت صحة المتباينة:

$$a^3+b^3+c^3 \geq a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ba}$$

ماهي أهم المخططات المساعدة في الحل؟

الحل.

الحقل المفاهيمي، المخطط، النظريات النشطة.

الحقل المفاهيمي

– هي نظرية معرفية، من أجل "توفير إطار يسمح بفهم التمفصلات والقطائع بين المعرفة والمعرفة المعبر عنها" إنه يتعلق بفهم كيف يتم بناء المفاهيم من نشاط في موضوعٍ ما.

– فضاء من المشاكل أو وضعيات المشكل –التي ينطوي علاجها على عدة مفاهيم وسيرورات متصلة ببعضها، وكذلك التمثيلات اللغوية والرمزية التي يمكن استخدامها لتمثيلها.

المخطط «Schème»التنظيم الثابت الذي يقود لمعالجة عائلة من المشاكل". يجب أن تكون العناصر المعرفية التي تسمح بالنشاط في الموضوع عملية.

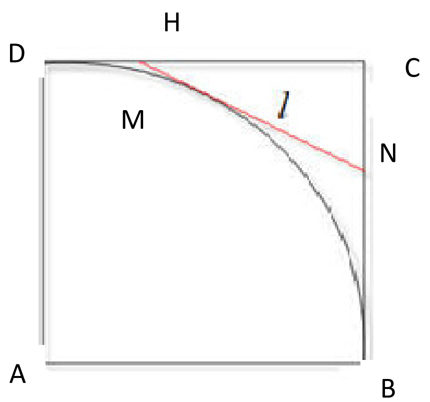
النظريات النشطة: هي جزء من المخطط، يمكن أن تكون صحيحة أو خاطئة؛ تشير إلى "خصائص العلاقات التي يتم كتابتها أو استخدامها من قبل الطالب في وضعيات حل المشكلات، وهذا لا يعني أنه قادر على شرحها أو تبريرها"؛ هي عبارة عن نمط من الخصائص.

المفهوم، كيف يمكن تملكه، مثلا: مفهوم الدالة. مختلف المخططات التي يمكن استحضارها للتحكم في هذا المفهوم.

– **المفهوم** في الرياضيات عبارة عن فكرة مجردة أو صورة ذهنية (عقلية) يكوّنها الفرد حول عدة أشياء أو مواقف رياضية تشترك جميعها في خاصية أو أكثر، بحيث يمكن الاعتماد على هذه الفكرة في تصنيف الأشياء وتحديد ما إذا كانت أمثلة أو ليست أمثلة على هذه الفكرة المجردة.

- **تملك المفهوم من طرف المتعلم:** يُكتسب المفهوم من خلال الوضعيات والمشكلات التي يحلها. عن طريق التعميم والتمييز(الاستقراء) لدى الطفل وعن طريق الاستدلال لدى المراهق. ويمكن أن نلخص ذلك في:
  - **التحديد والتصنيف:** تحديد جميع الخصائص أو السمات المميزة له وتحديد مجموعة أشمل ينتمي إليها المفهوم.
  - **المثال واللامثال:** تقديم أمثلة تحقق المفهوم، تقديم أمثلة لا ينتمي المفهوم إليها (أمثلة عدم التحقق).

أهم المخططات التي يمكن استحضارها لتحكم في مفهوم الدالة: دراسة تغيرات دالة، ربط مشاكل التصغير والتعظيم بمفهوم الدالة، شفعية بعض الدوال المرجعية...



لدينا: $l = NH = MH + MN = y + x$

ثم كون $[NH]$ مماس ينتج: $\left.\begin{array}{l} x = NB = MN \\ y = DH = MH \end{array}\right\}$

باستعمال نظرية فيثاغورس على المثلث القائم NCH ينتج:

$$(x+y)^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2$$

فنجد العبارة:

$$l(x) = x + \frac{1-x}{1+x}$$

يعني $l(x)$ كدالة لـ x معرفة على المجال $[0,1]$. وجدول تغيراتها هو:

x	0		$\sqrt{2}-1$		1
$l'(x)$		$-$	0	$+$	
$l(x)$	1	$\searrow$	$2(\sqrt{2}-1)$		1

ومنه نجد: $x = \sqrt{2} - 1$

- **الأدوات الضرورية للحل؟**

خواص المماس، نظرية فيثاغورس، ادخال مفهوم الدالة، القيمة الحدية، المقارنة.

- **هدف هذا النشاط:** توظيف مفهوم الدالة في حل مسائل التصغير والتكبير.
- **ماهي الصعوبات التي يمكن أن يوجهها التلاميذ أثناء الحل؟**

عدم استحضار مخطط القيمة الصغرى، توظيف الدوال، خواص المماس، الانتقال من الإطار الهندسي إلى التحليلي.

- **تصنيف المشكل المطروح:** مشكل تطبيقي.
- **المستوى:** السنة الثانية ثانوي.

II.

$$a^3+b^3+c^3 \geq a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ba}$$

من متباينة المتوسط لدينا:

$$a^2+b^2 \geq 2ab \Rightarrow a^3+ab^2 \geq 2a^2b$$

وبالمثل نتحصل على ما يلي:

$$\begin{cases} a^3+ab^2 \geq 2a^2b \\ b^3+ba^2 \geq 2b^2a \end{cases} \Longrightarrow a^3+b^3 \geq a^2b+b^2a$$

فينتج:

$$\begin{cases} a^3+b^3 \geq a^2b+b^2a \\ b^3+c^3 \geq c^2b+b^2c \\ c^3+a^3 \geq c^2a+a^2c \end{cases} \Rightarrow 2(a^3+b^3+c^3) \geq a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$$

باستعمال متباينة المتوسط مرة أخرى:

$$b+c \geq 2\sqrt{bc}, \qquad a+c \geq 2\sqrt{ac}, \qquad b+a \geq 2\sqrt{ba}$$

تنتج المتباينة المطلوبة مباشرة.

أهم المخططات المساعدة في الحل: مخطط متباينة المتوسط

هناك مخططات أخرى نذكر منها:

- **متباينة كوشي–شوارتز**: بأخذ

$$a_1=a\sqrt{a},\ a_2=b\sqrt{b}, a_3=c\sqrt{c},\ \ b_1=b_2=b_3=\sqrt{abc}$$

ثم استعمال متباينة المتوسط:

$$a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$$

امتحان 2 2021-2022

1. قدم طريقة لإنشاء مستطيل مساحته تساوي ضعف مساحة مستطيل معلوم. مُعرفًا بالإنشاء الهندسي وأهم خطواته.

2. ما المقصود بالتخمين في الرياضيات؟ قدم أمثلة

3. ماهي أهم خصائص البرهان الرياضي. اشرح مبدأ الاستدلال بالتراجع القوي.

4. أين الخلال في الاستدلال التالي:

- أثبت أحد التلاميذ لزملائه باستعمال التراجع أن:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{R}^*, a^{n-1} = 1 \qquad (*)$$

3. من أجل $n = 1$ العلاقة $(*)$ محققة

4. نفرض أن $(*)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي $k \leq n - 1$ ونثبت صحتها من أجل $k + 1$

لدينا : $a^{k-1} = 1$ من أجل $k \leq n - 1$. ولكن من جهة أخرى لدينا:

$$a^k = \frac{a^{k-1} \times a^{k-1}}{a^{k-2}} = \frac{1 \times 1}{1} = 1$$

من 1 و2 نستنتج أن العلاقة $(*)$ صحيحة.

5. كيف تثبت لتلاميذك أن $sin10^0$ هو عدد أصم. تكلم عن أهمية الاستدلال المستعمل في الرياضيات.