الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة – بوسعادة
المجاهد الفريق أحمد قايد صالح
قسم الرياضيات

Ecole Normale Supérieure
Bou Saâda
Dép. Mathématiques

رقم الاعتماد: 2025/80
تاريخ الاعتماد: 2025/03/12

مطبوعة دروس وتمارين محلولة في مقياس الجبر 4

المقياس: الجبر 4 (ر411)

المستوى: السنة الرابعة رياضيات

الأستاذ: عثمان عبداللاوي

الرتبة: أستاذ محاضر أ بالمدرسة العليا للأساتذة – بوسعادة–

السنة الجـامعية : 2025/2024

وزارة التعليـم العـالي والبحث العلـمي
المـدرسـة العليـا للأسـاتـذة بوسعادة
المسيـلة - الجـزائر
قـسـم الريـاضيـات

Ministre de l'Ensegnement Séperieur
et de la Recherche Scientifique
Ecole Normale Supérieure de Bou Saada
M'Sila - Algérie
Département de Mathématiques

مطبوعة دروس وتمارين محلولة في مقياس الجبر 4

مطبوعة دروس وتمارين محلولة في مقياس الجبر 4 موجهة لطلبة السنة الرابعة رياضيات بالمدرسة العليا للأساتذة ببوسعادة

من إعداد الأستاذ: عثمان عبداللاوي
أستـاذ محاضر أ بالمدرسة العليا للأساتذة ببوسعادة

السنة الجـامعية: 2025/2024

الفهرس

مقدمة 1

1 كثيرات الحدود والحلقات العاملية 2

1.1 مفاهيم أولية 3

2.1 كثيرات الحدود الفصولة 9

3.1 العلاقة بين معاملات وجذور كثير حدود 10

4.1 المعادلات الجبرية 11

5.1 كثيرات الحدود غير القابلة للاختزال 16

6.1 كثيرات الحدود والحلقة العاملية 19

7.1 معايير عدم قابلية الاختزال 20

8.1 تمارين مقترحة حول الفصل الأول 25

9.1 حلول بعض تمارين الفصل الأول 28

2 مدخل إلى التوسيعات الجبرية 32

1.2 مفاهيم أولية 33

2.2 نظريات أساسية حول التوسيعات الجبرية 38

3.2 تماثلات الحقول 43

4.2 التوسيع الجالوازي والزمرة الجالوازية 44

5.2 تمارين مقترحة حول الفصل الثاني 47

6.2 حلول بعض تمارين الفصل الثاني 49

3 المقاييس على حلقات رئيسية 58

1.3 مفاهيم أولية 59

2.3 المقياس حاصل القسمة 64

3.3 المقياس الجداء 65

4.3 عمليات على المقاييس الجزئية 67

5.3 تمارين مقترحة حول الفصل الثالث 73

6.3 حلول بعض تمارين الفصل الثالث 76

قائمة المراجع 82

Athmane Abdallaoui

مقدمـــة

تتناول المطبوعة البيداغوجية التي بين أيديكم عرضا نظريا لدروس مقياس الجبر 4 فهي تتناول بالدراسة كثيرات الحدود والحلقات العاملية، الحقول التبديلية وتوسيعاتها التي هي فضاءات شعاعية منها ما هي ذات أبعاد منتهيه وأخرى ذات أبعاد غير منتهية، ولكن تدرس من ناحية بنيتها كحقول، كما تتناول بنية جبرية جديدة وهي المقياس التي هي تعميم لبنية الفضاء الشعاعي مع بعض الاختلافات الناتجة من الاختلاف بين بنية الحلقة والحقل .

هذه المطبوعة هي ثمرة ما قمت به من عمل بيداغوجي بقسم الرياضيات بالمدرسة العليا للأساتذة ببوسعادة، من خلال تدريس محاضرات هذا المقياس من الموسم الدراسي 2018-2019 إلى غاية 2023-2024. تحتوي هذه المطبوعة على ثلاثة فصول موزعة على النحو التالي :

❁ الفصـــل الأول: يحتوي هذا الفصل على تذكير بالمعادلات الجبرية وكذا بعض خواص كثيرات الحدود المتعلقة بعدم قابلية الاختزال في حلقات عاملية وبشكل عام في حقول الأعداد .

❁ الفصـــل الثـــاني: يحتوي هذا الفصل على بعض النظريات الأساسية في التوسيعات الجبرية، تطرقنا في هذا الفصل كذلك إلى التوسيع الجالوازي والزمرة الجالوازية .

❁ الفصـــل الثـــالث: تطرقنا في هذا الفصل إلى المقاييس على حلقات رئيسية والعمليات عليها .

كل فصل من الفصول الثلاثة تم اختتامه بمجموعة من التمارين المقترحة التي يجب على الطالب الاجتهاد في حلها قبل الاطلاع على الحلول التفصيلية للبعض منها حتى يتمكن من المفاهيم المقدمة في كل فصل من الفصول بشكل أعمق.

في الأخير، أتمنى أن أكون قد وفقت بمشيئة الله، في تزويد طلبتنا الأعزاء بمولود بيداغوجي جديد، نحسبه أن يكون سندا لهم في دراسة مقياس الجبر 4، كما أتمنى من الطلبة والأساتذة الزملاء أن يوافونا بملاحظاتهم القيمة لنأخذ بها في المستقبل، والله الموفق.

لكل ملاحظاتكم يسرنا تواصلكم معنا عبر البريد الالكتروني أسفله

abdallaoui.athmane@ens-bousaada.dz

a.abdallaoui18@gmail.com



الفصل الأول

كثيرات الحدود والحلقات العاملية



في هذا الفصل سنتطرق إلى بعض المفاهيم الأساسية في موضوع حلقات وحقول الأعداد ثم نتطرق إلى المعادلات الجبرية وأخيرا إلى بعض النظريات الأساسية في الجبر ومفهوم عدم قابلية الاختزال في حلقة عاملية .

1.1 مفاهيم أولية

سوف نتطرق في هذا الجزء إلى بعض المفاهيم الأولية .

تعريف 1.1.1

لتكن A مجموعة غير خالية مزودة بعمليتين داخليتين نرمز لهما بـ $(+)$ و $(.)$، تكون A حلقة إذا تحققت الشروط التالية:

❶ $(A,+)$ زمرة تبديلية .
❷ العملية $(.)$ تجميعية .
❸ العملية $(.)$ توزيعية على العملية $(+)$.

ملاحظات 1.1.1

❶ تكون الحلقة A تبديلية إذا كانت العملية $(.)$ كذلك.
❷ نقول إن الحلقة A واحدية إذا كانت تقبل عنصرا حياديا بالنسبة للعملية $(.)$.

ترميزات:

❶ نرمز بـ 0_A للعنصر الحيادي للزمرة $(A,+)$.
❷ نرمز بـ 1_A للعنصر الحيادي لـ $(A,.)$ وإذا كان $1_A \in A$ فإن الحلقة واحدية .
❸ نرمز بـ $U(A)$ للعناصر القابلة للقلب في A .

تعريف 2.1.1

لتكن A حلقة بحيث $A \neq \emptyset$. نقول عن عنصر $a \in A$ ، $a \neq 0_A$ إنه:

❶ قاسما للصفر من اليمين إذا وجد $b \in A$، $b \neq 0$ بحيث: $b.a = 0_A$.
❷ قاسما للصفر من اليسار إذا وجد $b \in A$، $b \neq 0$ بحيث: $a.b = 0_A$.
❸ قاسما للصفر إذا كان قاسما له من اليسار ومن اليمين .

تعريف 3.1.1

نقول إن الحلقة A تامة إذا كانت لا تحوي أي قاسم للصفر.

تعريف 4.1.1

نقول إن الحلقة A حقلا إذا وفقط إذا كانت تبديلية وكان $U(A)=A-\{0_A\}$.

1.1.1 المثاليات في حلقة

تعريف 5.1.1

المجموعة الجزئية غير الخالية I من A تسمى مثاليا في A إذا تحقق الشرطين التاليين:

❶ من أجل كل a و b من I لدينا: $(a-b)\in I$.

❷ من أجل كل $a\in I$ و $r\in A$ لدينا: $a.r\in I$ و $r.a\in I$.

نتيجة 1.1.1

إذا كانت A حلقة واحدية وكان I مثاليا من A بحيث: $1_A\in I$ فإن: $I=A$.

تعريف 6.1.1

نقول عن حلقة A إنها رئيسية إذا كانت تبديلية وتامة وكان كل مثالي فيها مولد بعنصر واحد من A.

2.1.1 بعض النظريات الأساسية في الجبر

في هذا الجزء سنتطرق إلى بعض التظريات الأساسية في الجبر.

نظرية 1.1.1

لتكن A حلقة تامة. إذا كان $f(x)$ كثير حدود غير معدوم من الدرجة n في $A[x]$ فإنه يملك على الأكثر n جذرا في A .

برهان. يتم باستخدام البرهان بالتراجع على n حيث $n=\deg f$.

❶ إذا كان $0=\deg f(x)$ فإن $f(x)$ كثير حدود ثابت غير معدوم، في هذه الحالة $f(x)$ لا يملك أي جذر في A .

❷ إذا كان $n=1$ فإن $f(x)=a_0+a_1x$ حيث $a_1\neq 0_A$، وليكن a و b جذرين لـ $f(x)$ في A . عندئذ يكون لدينا: $a_0+a_1a=a_0+a_1b=0_A$ وبالتالي فإن $a_1(a-b)=0_A$ وبما أن الحلقة A تامة و $a_1\neq 0_A$ فإن $a-b=0_A$ أي أن $a=b$.

❸ نفرض الآن أن كل كثير حدود درجته n يقبل على الأكثر n جذرا في A وليكن $f(x)$ كثير حدود درجته $(n+1)$، نميز إذن الحالتين التاليتين:

الحالة 01: إذا كان $f(x)$ لا يقبل جذورا في A فإن النظرية محققة .

الحالة 02: إذا كان $f(x)$ يقبل جذرا في A وليكن a. عندئذ يوجد كثير حدود $g(x)$ من $A[x]$ و $\deg g(x)=n$ بحيث $f(x)=(x-a)g(x)$ وبما أن $\deg g(x)=n$ فإن $g(x)$ يقبل على الأكثر n جذرا في A ومنه $f(x)$ يقبل على الأكثر $(n+1)$ جذرا في A . □

نتيجة 2.1.1

ليكن K حقلا. كل كثير حدود غير معدوم من الدرجة n في $K[x]$ يملك على الأكثر n جذرا في K .

تعريف 7.1.1

لتكن K حقلا تبديليا. نقول إن K مغلق جبريا إذا وفقط إذا كان كل كثير حدود درجته أكبر أو يساوي 1 بمعاملات في K يقبل على الأقل جذرا في K .

نظرية 2.1.1

حقل الأعداد العقدية مغلق جبريا .

برهان. للنظرية العديد من البراهين الجبرية وأسهل البراهين هو الذي نستخدم فيه التحليل المركب وبالضبط نظرية ليوفيل والتي تنص على ما يلي:

كل تابع مركب صحيح ومحدود هو تابع ثابت (تابع مركب صحيح هو تابع هولومورفي على كامل $\mathbb{C}$).

ليكن $f(z)$ كثير حدود من $\mathbb{C}[z]$ بحيث $\deg f(z)\geq 1$. نفرض أن $f(z)$ لا يقبل جذورا في $\mathbb{C}$ ونعتبر التابع $g(z)$ المعرف بالعبارة :

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}$$

لأن $f(z)$ لا يقبل جذورا في $\mathbb{C}$ فإن التابع $g(z)$ صحيحا. نضع:

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n\in\mathbb{C}[z],$$
$$g(z)=\frac{1}{|z|^n\left|\frac{a_0}{z^n}+\frac{a_1}{z^{n-1}}+\ldots+a_n\right|}$$

لدينا $\lim\limits_{|z|\to+\infty}|g(z)|=0$ إذن التابع $g(z)$ محدود ومنه حسب نظرية ليوفيل فإن $g(z)$ ثابت وهذا ما ينتج عنه أن $f(z)$ ثابت وهذا تناقض مع كون $\deg f(z)\geq 1$ ومنه فإن $\mathbb{C}$ مغلق جبريا . □

نظرية 3.1.1

من أجل كل حقل K يوجد حقل مغلق جبريا يحوي K.

3.1.1 مميزة حلقة واحدية

تعريف 8.1.1

لتكن $(A,+,\times)$ حلقة واحدية ولنعتبر المجموعة

$$\chi_A = \{m \in \mathbb{N}^* : m \times 1_A = 0\}$$
$$= \{m \in \mathbb{N}^* : m \times x = 0,\ \forall x \in A\}$$

نميز حالتين:

❶ إذا كانت $\chi_A = \emptyset$ في هذه الحالة نقول إن مميزة A هي 0 ونكتب: $car(A) = 0$.

❷ إذا كانت $\chi_A \neq \emptyset$ في هذه الحالة أصغر عنصر في χ_A وليكن n نسميه مميزة A ونكتب:

$$car(A) = n \quad \text{مع} \quad n \geq 2.$$

مبرهنة 1.1.1

إذا كانت A حلقة تامة فإن $car(A) = 0$ أو $car(A) = p$ مع p عدد أولي.

ملاحظات 2.1.1

❶ بما أن كل حقل هو حلقة تامة فإن مميزة كل حقل هي 0 أو p حيث p أولي.

❷ إذا كانت مميزة الحقل معدومة فإن هذا الحقل غير منته.

❸ كل حقل منته مميزته عدد أولي.

❹ إذا كان H حقل جزئي من K فإن $car(H) = car(K)$.

4.1.1 بعض خواص كثيرات الحدود

الحساب على كثيرات الحدود

مبرهنة 2.1.1

إذا كانت A حلقة تامة فإنه من أجل كل f و g من $A[x]$ يكون لدينا:

$$\deg(f+g) \leq \deg f + \deg g \quad \text{و} \quad \deg(fg) = \deg f + \deg g$$

برهان. إذا كان $f = 0$ أو $g = 0$ فإن $fg = 0$ فتكون المساواة $\deg(fg) = \deg f + \deg g$ محققة.
نفرض الآن أن $f \neq 0$ و $g \neq 0$ وليكن $n = \deg f$ و $m = \deg g$. نضع :

$$g(x)=\sum_{i=0}^{m} b_i x^i \in A[x] \quad \text{و} \quad f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in A[x]$$

معامل الحد الأعلى درجة في كثير الحدود (fg) هو $a_n b_m$ ولكن بما أن $a_n \neq 0$ و $b_n \neq 0$ والحلقة A تامة فإن $a_n b_m \neq 0$ أي أن : $\deg(fg)=n+m$ وهو المطلوب. □

مبرهنة 3.1.1

إذا كانت الحلقة A تامة فإن العناصر القابلة للقلب في $A[x]$ هي كثيرات الحدود الثابتة $f=\lambda$ مع $\lambda \in U(A)$. وكحالة خاصة إذا كان K حقلا فإن :

$$U(K[x])=U(K)=K-\{0_K\}$$

برهان. ليكن $f \in U(A[x])$. يوجد إذن $g \in A[x]$ بحيث $fg=1_{A[x]}$. وباستعمال المبرهنة السابقة نجد:

$$\begin{aligned}(\deg fg=\deg 1_{A[x]}) &\Longleftrightarrow (\deg f+\deg g=0)\\ &\Longleftrightarrow (\deg f=\deg g=0)\end{aligned}$$

منه فإن f و g ثابتان قابلان للقلب في A وكنتيجة لذلك فإن $U(K[x])=K-\{0_K\}$ وهو المطلوب . □

نظرية 4.1.1

إن الحلقة $K[x]$ حيث K حقلا هي حلقة رئيسية.

برهان. ليكن I مثاليا في $K[x]$، يمكن أن نفترض أنه يختلف عن $\{0_K\}$، إذ في هذه الحالة ليس هناك ما يجب إثباته ولنعرف المجموعة $N=\{\deg f : f \in I-\{0_K\}\}$. إن N مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{N}$ فهي تقبل إذن عنصرا أصغريا ونجد f_0 في $I-\{0_K\}$ يحقق:

$$\deg f_0=\min\{\deg f : f \in I-\{0_K\}\}$$

بالطبع لدينا الاحتواء التالي: $I \supset \{f_0 q : q \in K[x]\}=f_0K[x]$ وبالعكس، إذا كان f عنصرا من I، توجد ثنائية (q,r) من $K[x]$ تحقق:

$$f=qf_0+r \quad \text{مع} \quad \deg r<\deg f_0$$

ولكن $r=f-qf_0$ ينتمي إلى I، فإذا كان $r \neq 0$ ناقض ذلك تعريف f_0 إذن $r=0$ ومنه $f \in f_0K[x]$ فنكون قد أثبتنا أن $f_0K[x]=I$، والمثالي I رئيسيا . □

تعريف 9.1.1

نقول عن كثيري حدود f و g أنهما متشاركان في الحلقة $A[x]$ إذا وجد $\lambda \in U(A)$ بحيث: $f=\lambda g$.

تعريف 10.1.1

نعتبر كثيري حدود f و g من $K[x]$. نقول إن f يقسم g في $K[x]$ إذا وجد q من $K[x]$ بحيث:

$$g = qf.$$

مبرهنة 4.1.1

نعتبر كثيرات الحدود h، g، f و k من الحلقة $K[x]$. لدينا الخواص التالية:

❶ إذا كان f يقسم g و g يقسم h فإن f يقسم h .

❷ إذا كان f يقسم g و f يقسم h فإن f يقسم $g+h$.

❸ إذا كان f يقسم g و $g \neq 0$ فإن $\deg f \leq \deg g$.

❹ إذا كان f يقسم g و h يقسم k فإن fh يقسم gk .

❺ إذا كان f يقسم g فإن f^n يقسم g^n وذلك من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$.

مبرهنة 5.1.1: (مبرهنة القسمة الإقليدية)

ليكن كثيري الحدود f و g من $K[x]$ حيث $g \neq 0$. توجد ثنائية وحيدة (q,r) من $K[x]$ تحقق:

$$f = qg + r \quad \text{مع} \quad \deg r < \deg g .$$

تعريف 11.1.1: (القاسم المشترك الأكبر)

لتكن كثيرات الحدود f_1 ، f_2 ،...، f_n من $K[x]$. لأن الحلقة $K[x]$ رئيسية فإن المثالي المعرف بـ:

$$< f_1 > + < f_2 > + \ldots + < f_n > = \{A_1 f_1 + A_2 f_2 + \ldots + A_n f_n \ / \ A_1, A_2, \ldots, A_n \in K[x]\}$$

مولد بكثير حدود واحدي وحيد وليكن g، نسميه القاسم المشترك الأكبر لكثيرات الحدود f_1 ، f_2 ،...، f_n ونكتب:

$$g = p\gcd_{K[x]}(f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

مبرهنة 6.1.1: (خواص القاسم المشترك الأكبر)

لتكن كثيرات الحدود f_2، f_1 و f_3 من الحلقة $K[x]$. لدينا الخواص التالية:

❶ إذا كان f_3 يقسم كلا من f_1 و f_2 فإنه يقسم القاسم المشترك الأكبر لـ f_1 و f_2 .

❷ توجد ثنائية (u,v) من $K[x]$ بحيث: $uf_1 + vf_2 = p\gcd(f_1, f_2)$.

مبرهنة 7.1.1: (مبرهنة بيزوت)

ليكن f_1 و f_2 كثيري حدود من الحلقة $K[x]$. يكون f_1 و f_2 أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا وجدت ثنائية (u,v) من $K[x]$ بحيث: $uf_1+vf_2=1_{K[x]}$.

برهان. كل قاسم مشترك لـ f_1 و f_2 يقسم uf_1+vf_2 أي يقسم $1_{K[x]}$ ومنه $pgcd(f_1,f_2)=1_{K[x]}$.
عكسيا نفرض أن $pgcd(f_1,f_2)=1_{K[x]}$، بما أن $pgcd(f_1,f_2)$ يولد المثالي $(<f_1>+<f_2>)$ فإن $1_{K[x]}\in(<f_1>+<f_2>)$ وبالتالي توجد ثنائية (u,v) من $K[x]$ بحيث: $uf_1+vf_2=1_{K[x]}$. □

2.1 كثيرات الحدود الفصولة

تعريف 1.2.1: (كثير الحدود الفصول)

ليكن $f(x)\in K[x]$ مع $\deg f\geq 1$ وليكن L حقلا مغلقا جبريا يحوي K ولتكن الأعداد α_1 ، α_2 ،....، α_n جذور $f(x)$ في L. نقول إن $f(x)$ فصول على K إذا تحقق ما يلي:

$$\forall (i,j)\in[[1,n]]^2 : i\neq j \Longrightarrow \alpha_i\neq\alpha_j.$$

أمثلة 1.2.1

في حقول الأعداد أي من أجل $K=\mathbb{Q}$ و $L=\mathbb{C}$ ، نأخذ المثالين التاليين :

❶ كثير الحدود المعرف بـ : $f(x)=x^2+2$ ينتمي إلى $\mathbb{Q}[x]$ ويقبل جذرين مختلفين في $\mathbb{C}$ هما $-i\sqrt{2}$ و $+i\sqrt{2}$ إذن $f(x)$ فصول على $\mathbb{Q}$.

❷ كثير الحدود المعرف بـ : $f(x)=(x-1)^2(x^2+1)$ ليس فصولا على $\mathbb{Q}$ لأن الجذر 1 رتبة تضاعفة 2.

مبرهنة 1.2.1: (تمييز كثير الحدود الفصول)

ليكن K حقل أعداد أي: $\mathbb{Q}\subseteq K\subseteq\mathbb{C}$ وليكن $f(x)\in K[x]$ مع $\deg f\geq 1$ و α_1 ، α_2 ،....، α_n جذور $f(x)$ في $\mathbb{C}$. نقول عن $f(x)$ إنه فصول على K إذا حقق إحدى القضايا الأربعة المتكافئة التالية:

❶ الجذور α_1 ، α_2 ،....، α_n لـ $f(x)$ في $\mathbb{C}$ متمايزة مثنى مثنى .

❷ $pgcd_{\mathbb{C}[x]}(f,f')=1_{\mathbb{C}[x]}$.

❸ $pgcd_{K[x]}(f,f')=1_{K[x]}$.

❹ $pgcd_{E[x]}(f,f')=1_{E[x]}$ وذلك من أجل كل E حيث $\mathbb{Q}\subseteq E\subseteq\mathbb{C}$.

برهان. لتكن α_1 ، α_2 ،....، α_n جذور $f(x)$ في $\mathbb{C}$. بداية نكتب كلا من $f(x)$ و $f'(x)$ على الشكل

التـالي:

$$\frac{1}{a_n}f'(x)=g_1(x)+\ldots+g_n(x) \quad \text{و} \quad f(x)=a_n(x-\alpha_n)\ldots(x-\alpha_0)$$

$$g_1(x)=\prod_{i=1,i\neq 1}^{n}(x-\alpha_i),\ldots,\ g_k(x)=\prod_{i=1,i\neq k}^{n}(x-\alpha_i),\ldots,g_n(x)=\prod_{i=1,i\neq n}^{n}(x-\alpha_i)$$

الاستلزام الأول $((2)\Rightarrow(1))$: لأن $f(x)$ فصول على K فإن الجذور α_1 ، α_2 ،....، α_n متمايزة مثنى مثنى ومنه $f(x)$ و $f'(x)$ لا يملكان أي جذر مشترك في $\mathbb{C}$ وبالتـالي فـإن: $p\gcd_{\mathbb{C}[x]}(f(x),f'(x))=1_{\mathbb{C}[x]}$.

الاستلزام الثاني $((3)\Rightarrow(2))$: لأن $K[x]$ حلقة واحدية جزئية من $\mathbb{C}[x]$ فإن $f(x)$ و $f'(x)$ أوليان فيما بينهما في $K[x]$ أي أن: $p\gcd_{K[x]}(f(x),f'(x))=1_{K[x]}$.

الاستلزام الثالث $((4)\Rightarrow(3))$: لأن $p\gcd_{K[x]}(f(x),f'(x))=1_{K[x]}$ فإنه حسب مبرهنة بيزوت توجد ثنائية $(a(x),b(x))$ من $K[x]$ بحيث: $a(x)f(x)+b(x)f'(x)=1_{K[x]}$ وبما أن $K[x]\subset E[x]$ فإن الثنائية $(a(x),b(x))$ من $E[x]$ ومنه $p\gcd_{E[x]}(f(x),f'(x))=1_{E[x]}$.

الاستلزام الرابع $((1)\Rightarrow(4))$: لأنه لدينا: $\forall E: K\subset E\subset\mathbb{C}$, $p\gcd_{E[x]}(f(x),f'(x))=1_{E[x]}$ فإنه ينتج لدينا: $p\gcd_{\mathbb{C}[x]}(f(x),f'(x))=1_{\mathbb{C}[x]}$ وذلك من أجل $E=\mathbb{C}$. توجد إذن ثنائية $(a(x),b(x))$ من $\mathbb{C}[x]$ بحيـث:

$$a(x)f(x)+b(x)f'(x)=1_{\mathbb{C}[x]} \qquad (1.1)$$

إذا فرضنا وجود $i\neq j$ بحيث: $\alpha_i=\alpha_j=\alpha$ فإن α سيكون جذرا لـ $f'(x)$ وبتعويض x بـ α في العلاقة (1.1) نجد أن $1=0$ وهذا تناقض نستنتج إذن أنه من أجل كل $i\neq j$ فإن $\alpha_i\neq\alpha_j$ أي أن $f(x)$ فصول على K . □

3.1 العلاقة بين معاملات وجذور كثير حدود

ليكن K حقل أعداد أي: $\mathbb{Q}\subseteq K\subseteq\mathbb{C}$ وليكن $f(x)\in K[x]$ مع $\deg f\geq 1$. نضـــع:

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n\in K[x]$$

ولتكن α_1 ، α_2 ،....، α_n جذور $f(x)$ في $\mathbb{C}$ معادة بقدر رتب تضاعفها، يكون لدينا إذن:

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)\in K[x]$$

بالنشر نجـد:

$$f(x)=a_n\begin{bmatrix}x^n-\left(\sum_{i_1=1}^{n}\alpha_{i_1}\right)x^{n-1}+\left(\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\right)x^{n-2}\\ -\ldots+(-1)^k\left(\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_k}\right)x^{n-k}\\ -\ldots+(-1)^n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\end{bmatrix}$$

بوضـــع:

$$\sigma_0=1,\quad \sigma_1=\sum_{i_1=1}^{n}\alpha_{i_1},\quad \sigma_k=(-1)^k\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_k}$$

فإنه يمكننا كتابة $f(x)$ على الشكل التالي:

$$f(x)=a_n\begin{bmatrix}x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x+\ldots+(-1)^k\sigma_kx^{n-k}\\ +\ldots+(-1)^n\sigma_n\end{bmatrix}$$

أي أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل:

$$f(x)=a_n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sigma_k x^{n-k}$$

من جهة أخرى يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل التالي:

$$f(x)=a_n\left[x^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1}+\ldots+\frac{a_1}{a_n}x+\frac{a_0}{a_n}\right]$$

أي أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل:

$$f(x)=a_n\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n-k}}{a_n}x^{n-k}$$

بمطابقة العبارات السابقة نحصل على:

$$\sigma_k=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n},\qquad \forall k\in[[0,n]]$$

وهي العلاقات التي تربط معاملات كثير حدود من الدرجة n بجذوره.

4.1 المعادلات الجبرية

تعريف 1.4.1

نسمي معادلة جبرية كل معادلة من الشكل: $f(x)=0$ حيث $f(x)$ كثير حدود بمعاملات في $\mathbb{R}$ أي أن $f(x)\in\mathbb{R}[x]$. إذا كانت $\deg f(x)=n\in\mathbb{N}$، نقول معادلة جبرية من الدرجة n .

1.4.1 الجذور النونية لعدد مركب

في هذا الجزء سنتطرق إلى حلول معادلة الجذور النونية التالية:

$$x^n-a=0 \quad \text{مع} \quad n\in\mathbb{N}^* \qquad (2.1)$$

من أجل ذلك نميز الحالات التالية:

❶ الحالة 01: حلول المعادلة (2.1) في $\mathbb{R}$ في حالة $a\in\mathbb{R}^*$.

❷ الحالة 02: حلول المعادلة (2.1) في $\mathbb{C}$ في حالة $a\in\mathbb{R}^*$.

❷ الحالة 03: حلول المعادلة (2.1) في $\mathbb{C}$ في حالة $a\in\mathbb{C}^*$.

الحالة 01: نضع: $f(x)=x^n-a$ ومنه $f'(x)=nx^{n-1}$ ونشكل جدول تغيرات f في الحالتين التاليتين:

- حالة n فردي : لدينا جدول التغيرات التالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-a$	↗	$+\infty$

- حالة n زوجي : لدينا جدول التغيرات التـالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-a$	↗	$+\infty$

التمثيل البياني: مثل بيانيا باعتبار الحالات التالية:

- حالة فردي n و $a>0$، حالة n زوجي و $a>0$.
- حالة n فردي و $a<0$، حالة n زوجي و $a<0$.

الحالة 02: في هذه الحالة فان المعادلة (2.1) تقبل في $\mathbb{C}$، n جذرا بسيطا وحسب إشارة a نميز الحالتين:

- في حالة $a>0$، لدينا: $a=a\exp(2ik\pi)$ ومنه فإن حلول المعادلة (2.1) في $\mathbb{C}$ هي من الشكل:

$$z_k=\sqrt[n]{a}\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right),\quad k\in[[0,n-1]]$$

- في حالة $a<0$، لدينا: $a=-a\exp((2k+1)i\pi)$ ومنه فإن حلول المعادلة (2.1) في $\mathbb{C}$ هي من الشكل:

$$z_k=\sqrt[n]{-a}\exp\left(\frac{(2k+1)i\pi}{n}\right),\quad k\in[[0,n-1]]$$

الحالة 03: في هذه الحالة لدينا $a=|a|\exp(\theta i+2k\pi i)$ مع $-\pi\le\theta<\pi$ هي العمدة الرئيسية لـ a، في هذه الحالة حلول المعادلة (2.1) في $\mathbb{C}$ هي من الشكل:

$$z_k=\sqrt[n]{|a|}\exp\left(\frac{(\theta+2k\pi)i}{n}\right),\quad k\in[[0,n-1]]$$

1.4.1 ملاحظة

الجذر النوني لعدد حقيقي نرمز له بـ $\sqrt[n]{\cdot}$ $(\sqrt[2]{\cdot}=\sqrt{\cdot})$ ومن أجل كل $a\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}^*$، لديـنا:

$$\sqrt[n]{a}=\begin{cases}0 & \text{إذا كان } a=0\\ \text{الحل الوحيد للمعادلة (2.1) إذا كان } n \text{ فرديا}\\ \text{غير معرف إذا كان } n \text{ زوجيا و } a<0\\ \text{الحل الوحيد للمعادلة (2.1) إذا كان } n \text{ زوجيا و } a>0\end{cases}$$

2.4.1 المعادلات الجبرية النموذجية من الدرجة الثالثة

في هذا الجزء سنتطرق إلى المعـادلات من الشـــكل:

$$x^3+px+q=0 \quad \text{حيث} \quad p,q\in\mathbb{R} \tag{3.1}$$

وذلك باستعمال طريقة كاردون. تعتمد هذه الطريقة على البحث عن الحلول من الشكل: $z=u+v$ مع وضع شرط على u و v أي وضع الشـرط: $uv=-\frac{p}{3}$ وذلك للحصول على معادلة سهلة الحل. ليكن z حلا للمعادلة (3.1) في $\mathbb{C}$ إذن $z^3+pz+q=0$ باستبدال z بـ $(u+v)$ نجد:

$$\left(u^3+v^3+q\right)+(u+v)(3uv+p)=0$$

ومنه بوضـع: $3uv+p=0$ أي $uv=-\frac{p}{3}$ نحصل على الجملة التالية:

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=-\frac{p^3}{27} \end{cases} \tag{4.1}$$

ومنه يكون z حلا للمعادلة (3.1) في $\mathbb{C}$ إذا وفقط إذا تحقق ما يـــلي:

$$\begin{cases} \exists (u,v)\in\mathbb{C}^2 : \begin{cases} u^3+v^3+q=0 \\ u^3v^3=-\frac{p^3}{27} \end{cases} \\ z=u+v \end{cases}$$

الجملة (4.1) ينتج عنها أن u^3 و v^3 هما حلان للمعادلة: $x^2+qx-\frac{p^3}{27}=0$، فيكـون لديـنا:

$$\Delta=\frac{27q^2+4p^3}{27} \quad \text{ومنه} \quad u^3=\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{و} \quad v^3=\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}$$

إذن بوضـع $j=\exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$، $\alpha=\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$ و $\beta=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}}$ نحصـــل على مـــا يلي:

$$u\in\{\alpha,j\alpha,j^2\alpha\} \quad \text{و} \quad v\in\{\beta,j\beta,j^2\beta\}$$

وبما أن $z=u+v$ و $uv\in\mathbb{R}$ فإن مجموعة حلول الجملة (4.1) هـي:

$$S=\{\alpha+\beta,j\alpha+j^2\beta,j^2\alpha+j\beta\}$$

دراسة طبيعة الجذور حسب إشارة Δ: نميز الحالات التـالية:

- إذا كان $\Delta=0$، يكون لدينا $\alpha=\beta=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}$ وحلول المعادلة (4.1) هـــي:

$$z_1=\alpha+\beta=2\alpha$$
$$z_2=j\alpha+j^2\beta=\left(j+j^2\right)\alpha=-\alpha$$
$$z_2=j^2\alpha+j\beta=\left(j^2+j\right)\alpha=-\alpha$$

في هذه الحالة المعـادلة (4.1) تقبل حلين حقيقيين أحدهـما مضـاعف.

• إذا كان $\Delta > 0$، يكون لديـنا:

$$z_1 = \alpha + \beta \in \mathbb{R}$$
$$z_2 = j\alpha + j^2\beta$$
$$\overline{z}_2 = \overline{j}\alpha + \overline{j}^2\beta = j^2\alpha + j\beta = z_3$$

في هذه الحالة المعـادلة (4.1) تقبل حلا حقيقيـا وحليـن مركبيـن.

• إذا كان $\Delta < 0$، يكون لدينا $\beta = \overline{\alpha}$ وحلول المعادلة (4.1) هـي:

$$z_1 = \alpha + \beta = (\alpha + \overline{\alpha}) \in \mathbb{R}$$
$$z_2 = j\alpha + j^2\beta = j\alpha + j^2\overline{\alpha} = \left(j\alpha + \overline{j\alpha}\right) \in \mathbb{R}$$
$$z_3 = j^2\alpha + j\beta = j^2\alpha + j\overline{\alpha} = \left(j^2\alpha + \overline{j^2\alpha}\right) \in \mathbb{R}$$

في هذه الحالة المعادلة (4.1) تقبل ثلاثـة حلـول حقيقية متمايـزة مثنى مثنى.

ملاحظة 2.4.1

لحل معادلة جبرية من الدرجة الثالثة في شكلها العام:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \text{حيث} \quad a \neq 0 \quad \text{و} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \qquad (5.1)$$

نضع:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$h(x) = x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}$$
$$g(x) = h\left(x - \frac{b}{3a}\right)$$

فإذا كانت z_1، z_2 و z_3 حلولا لـ $g(x) = 0$ فإن $z_2 - \frac{b}{3a}$ ، $z_1 - \frac{b}{3a}$ و $z_3 - \frac{b}{3a}$ حلولا لـ $h(x) = 0$ أي حلولا لـ $f(x) = 0$، إذن لإيجاد حلول المعادلة (5.1) يكفي إيجاد حلول المعادلة : $g(x) = 0$ حيث:

$$g(x) = x^3 + px + q \quad \text{مع} \quad p = \frac{c}{a} - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 \quad \text{و} \quad q = \frac{d}{a} + \frac{2}{27}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{3}\frac{bc}{a^2}$$

3.4.1 المعادلات الجبرية النموذجية من الدرجة الرابعة

في هذا الجزء سنتطرق إلى المعادلات من الشكل:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \quad \text{حيث} \quad r, q \neq 0 \quad \text{و} \quad p, q, r \in \mathbb{R} \qquad (6.1)$$

وذلك باستعمال طريقة فيراري. تعتمد هذه الطريقة على كتابة كثير الحدود $f(x) = x^4 + px^2 + qx + r$ على شكل جداء كثيري حدود من الدرجة الثانية أي على الشكل:

$$f(x) = \left(x^2 + ax + b\right)\left(x^2 + cx + d\right) \qquad (7.1)$$

بمطابقة العبارة (6.1) مع العبارة (7.1) نحصل على جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+d+ac=p \\ ad+bc=q \\ bd=r \end{cases} \qquad (8.1)$$

- نعلم أن الجملة (8.1) تقبل حلا وحيدا (a,b,c,d) بدلالة p ، q و r .
- إذا كان $a=0$ فإن $c=0$ ومنه $q=0$ وهذا تناقض إذن $a\neq 0$ ومنه $c\neq 0$.

حل الجملة (8.1) يمكن أن يكون سهلا وفي هذه الحالة حلول المعادلة $f(x)=0$ هي:

$$S=\left\{\frac{-a\pm\sqrt{\Delta}}{2},\frac{-c\pm\sqrt{\Delta'}}{2}\right\} \quad \text{حيث} \quad \Delta=a^2-4b \quad \text{و} \quad \Delta'=c^2-4d$$

إذا كان حل الجملة (8.1) ليس سهلا. نتبع عندئذ الطريقة التـالية:
والتي تهدف في المرحلة الأولى إلى كتابة $(b+d)$ كحل لمعادلة من الدرجة الثالثة وفي المرحلة الثانية إلى تعيين الاعداد الحقيقية (a,b,c,d) بدلالة p ، q و r. من المعادلة الأولى في الجملة (8.1) لدينا: $a=-c$ وبالتعويض في المعادلة الثانية من الجملة (8.1) نجد $a^2=(b+d)-p$ وبالتعويض في المعادلة الثالثة من الجملة (8.1) نجد $a(d-b)=q$ ومنه فإن $a^2\left(d^2+b^2-2bd\right)=q^2$ ولدينا: $d^2+b^2-2bd=(b+d)^2-4bd$ إذن $a^2\left[(b+d)^2-4bd\right]=q^2$ وبما أن $a^2=(b+d)-p$ فإنه يكون لدينا: $[(b+d)-p]\left[(b+d)^2-4bd\right]=q^2$ ولدينا: $bd=r$ نجد إذن أن $(b+d)$ يحقق المعـادلة: $(b+d)^3-p(b+d)^2-4r(b+d)+4pr-q^2=0$ أي أن $(b+d)$ هو حل للمعادلة التـالية:

$$x^3-px^2-4rx+4pr-q^2=0 \qquad (9.1)$$

تسمى المعادلة (9.1) بالمعادلة المسـاعدة لحل معادلة من الدرجة الرابعة في شكلـها النمـوذجي (6.1) .
نعلم أن المعادلة (9.1) تقبل حلا حقيقيا وحيدا أو حلين حقيقيين أحدهما مضاعف أو ثلاث حلول حقيقية مختلفة مثنى مثنى.
السؤال: كيف يتم إختيار الحـل الحقيقي $(b+d)$ من بين الحـلول الحقيقية؟
للإجابة على هذا السـؤال نحتاج إلى الإجـابة على **التمرين التـالي:**
برهن أن أكبر الحلول الحقيقية للمعادلة (9.1) وليكن δ يحقق الشرطين التاليين: $\delta>p$ و $\delta^2>4r$.
نضع:

$$f(x)=x^3-px^2-4rx+4pr-q^2$$

لدينا: $f(p)=f\left(\pm 2\sqrt{r}\right)=-q^2$ وليكن δ جذرا حقيقيا لـ $f(x)$، يكون δ أكبر الجذور الحقيقية لـ $f(x)$ إذا وفقط إذا حقق ما يلي:

$$\forall x\geq\delta : f(x)\geq 0$$

وبما أنه لدينا: $f(p)=f\left(\pm 2\sqrt{r}\right)=-q^2$ فإن $p<\delta$ و $2\sqrt{r}<\delta$ أي أن $p<\delta$ و $4r<\delta$ وهو المطلـوب.

ملاحظة 3.4.1

إذا كان $r<0$ فإنه من الواضح أن $\delta^2>4r$ إذ أنه ليس هناك ما ينبغي برهانه في هذه الحالة .

لدينا: $a^2=(b+d)-p$ إذن $(b+d)>p$ ولدينا كذلك $a^2\left[(b+d)^2-4bd\right]=q^2$ إذن $(b+d)^2>4r$ ومنه فإن القيمة الملائمة لـ $(b+d)$ هي δ أكبر الحلول الحقيقية للمعادلة المساعدة (9.1) .
نضع: $\delta=b+d$، بماأنه لدينا: $r=bd$ فإن b و d هما حلي المعادلة: $x^2-\delta x+r=0$ ومنه نجد:

$$b,d\in\left\{\frac{\delta\pm\sqrt{\delta^2-4r}}{2}\right\}.$$

لدينا كذلك: $a^2=(b+d)-p$ أي أن $a^2=\delta-p$ ومنه $a\in\{\pm\sqrt{\delta-p}\}$ وبما أن $c=-a$ فإن $c\in\{\mp\sqrt{\delta-p}\}$.
نختار إذن b و d من $\left\{\frac{\delta\pm\sqrt{\delta^2-4r}}{2}\right\}$ و a و c من $\{\pm\sqrt{\delta-p}\}$ بحيث: $ad+bc=q$.

ملاحظة 4.4.1

لحل معادلة جبرية من الدرجة الرابعة في شكلها العام:

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \quad \text{حيث} \quad a\neq 0 \quad \text{و} \quad a,b,c,d,e\in\mathbb{R} \qquad (10.1)$$

نضع:

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$
$$h(x)=x^4+\frac{b}{a}x^3+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x+\frac{e}{a}$$
$$g(x)=h\left(x-\frac{b}{4a}\right)$$

بعد الحساب نجد أن: $g(x)=x^4+px^2+qx+r$ حيث : p، q و r دوال بدلالة الأعداد الحقيقية a، b، c، d و e :

$$p=\omega_1(a,b,c,d,e) \quad ، \quad q=\omega_2(a,b,c,d,e) \quad \text{و} \quad r=\omega_3(a,b,c,d,e)$$

فإذا كانت z_1، z_2، z_3 و z_4 حلولا لـ $g(x)=0$ فإن $(z_1-\frac{b}{4a})$، $(z_2-\frac{b}{4a})$، $(z_3-\frac{b}{4a})$ و $(z_4-\frac{b}{4a})$ حلولا لـ $h(x)=0$ أي حلولا للمعادلة (10.1).

5.1 كثيرات الحدود غير القابلة للاختزال

تعريف 1.5.1

لتكن A حلقة تامة وتبديلية وليكن $a\in A-\{0_A\}$. نقول عن a أنه غير قابل للاختزال في A إذا حقق الشرطين التاليين:

❶ $a\notin U(A)$.

❷ إذا كان b يقسم a فإن $<a>=<b>$ أو $A=<b>$.

مبرهنة 1.5.1

لتكن A حلقة تامة وتبديلية وليكن $a\in A-\{0_A\}$. يكون a غير قابل للاختزال في A إذا حقق الشرطين التاليين:

❶ $a\notin U(A)$.

❷ إذا كان $a=bc$ فإن $b\in U(A)$ أو $c\in U(A)$.

برهان. للبرهان على هذه القضية، يكفي أن نبين صحة التكافؤ التـالي:

$$\left((b\mid a)\Longrightarrow\begin{cases}<a>=<b>\\ \text{أو}\\ A=<b>\end{cases}\right)\Longleftrightarrow\left((a=bc)\Longrightarrow\begin{cases}b\in U(A)\\ \text{أو}\\ c\in U(A)\end{cases}\right)$$

وذلك من أجل كل a، b و c من A .

(أ) نبين الاستلزام الأول: لنفرض أن $a=bc$، إذن b يقسم a، وحسب (2) من التعريف ينتـــج أن:

$$<b>=<a> \quad \text{أو} \quad A=<b>$$

- إذا كان $<a>=<b>$ فإن $b\in<a>$ ومنه: $\exists d\in A: b=ad$ وبالتـالي $a=bc=adc$ وينتج عن هذا أن: $a(1-dc)=0$ إذن $1-dc=0$ وذلك لأن $a\neq 0$ و A حلقة تامة ومنه $dc=1$ وهذا يعني أن: $c\in U(A)$.
- إذا كان $A=<b>$ فإن $1\in<b>$ ومنه: $\exists\alpha\in A: 1=b\alpha$ وبالتـالي $b\in U(A)$. أثبتنا إذن أن $b\in U(A)$ أو $c\in U(A)$.

(ب) نبين الاستلزام التاني: لنفرض أن b يقسم a ومنه: $\exists c\in A: a=bc$ وحسب (2) من المبرهنة أعلاه يكون لديـــنا: $c\in U(A)$ أو $b\in U(A)$. نميز إذن الحالتين التاليتين:

- إذا كان $b\in U(A)$ فإنه: $\exists\alpha\in A: 1=b\alpha$ ومنه $1\in<b>$ وبالتالي $A=<b>$.
- إذا كان $c\in U(A)$ فإنه ينتج لدينا: $\exists\beta\in A: 1=c\beta$ ومن كون $a=bc$ ينتج أن $a\in<b>$ إذن $<a>\subset<b>$ ولكن $1=c\beta$ إذن:

$$(a=bc)\Longrightarrow a\beta=bc\beta=b.1$$
$$\Longrightarrow a\beta=b$$

وهذا يعني أن $b\in<a>$ ومنه $<b>\subset<a>$.

من الاحتوائيـــن الســابقيـــن ينتـــج أن: $<a>=<b>$ وهو المطلـــوب. □

تعريف 2.5.1

لتكن A حلقة تامة وتبديلية. نقول إن A حلقة عاملية إذا كان كل عنصر $a \in A-\{0_A\}$ وغير قابل للقلب في A يكتب بطريقة وحيدة من الشكل :

$$a = \lambda p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$$

حيث من أجل كل $i \in \mathbb{N}$ و $i \in [[1,r]]$، لدينا : $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ و $p_i \in A$ غير قابل للإختزال في A مع $\lambda \in U(A)$.

أمثلة 1.5.1

❶ $(\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة عاملية .
❷ $(K[x],+,\times)$ حيث K حقل تبديلي هي حلقة عاملية .
❸ $(\mathbb{Z}[i\sqrt{5}],+,\times)$ حيث $A=\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]=\{a+ib\sqrt{5},\ a,b\in\mathbb{Z}\}$ حلقة ليست عاملية .

A حلقة جزئية من $\mathbb{C}$. من أجل كل α من A نضع: $\mathrm{N}(\alpha)=\|\alpha\|_2$. مجموعة العناصر القابلة للقلب في A هي: $U(A)=\{-1,1\}$. لنبين أن الحلقة A ليست عاملية من أجل ذلك نعتبر المثال المضاد التـالي:
العدد 9 يكتب بطريقتين مختلفتين على شكل جداء عناصر غير قابلة للاختزال في A :

$$9=3\times 3=(2-i\sqrt{5})\times(2+i\sqrt{5})$$

لنتحقق أن كلا من الأعداد: 3، $(2-i\sqrt{5})$ و $(2+i\sqrt{5})$ غير قابلة للإختزال في A. العدد 3 لا ينتمي إلى مجموعة العناصر القابلة للقلب في A. بقي إثبات الاستلزام التالي:

$$(3=\alpha\beta)\Longrightarrow(\alpha\in U(A)) \quad \text{أو} \quad (\beta\in U(A))$$

نفرض جدلا أن $3=\alpha\beta$ حيث $\alpha\notin U(A)$ و $\beta\notin U(A)$. لدينا: $9=\mathrm{N}(3)=\mathrm{N}(\alpha)\mathrm{N}(\beta)$ وبما أن $\mathrm{N}(\alpha)\notin U(A)$ فإن $\mathrm{N}(\alpha)=3$ ومنه نحصل على التـالي:

$$\mathrm{N}(\alpha) = 3 \Longrightarrow \exists a,b\in\mathbb{Z}:\mathrm{N}(\alpha)=\mathrm{N}(a+ib\sqrt{5})=3$$
$$\Longrightarrow \exists a,b\in\mathbb{Z}: a^2+5b^2=3$$

وهذا تناقض مع كون a و b من $\mathbb{Z}$. إذن إذا كان $3=\alpha\beta$ فإن $\alpha\in U(A)$ أو $\beta\in U(A)$. بنفس الطريقة نبرهن أن كلا من العناصر $(2-i\sqrt{5})$ و $(2+i\sqrt{5})$ غير قابلة للإختزال في A .

ملاحظة 1.5.1

من العلاقة التـالية:

$$9=3\times 3=(2-i\sqrt{5})\times(2+i\sqrt{5})$$

فإن 3 تقسم $(2-i\sqrt{5})\times(2+i\sqrt{5})$ في A ولكنها لا تقسم $(2-i\sqrt{5})$ في A ولا تقسم $(2+i\sqrt{5})$ في A أي أن 3 ليس أوليا في A ولكنه قابل للإختزال في A . نستنتج إذن أن الحلقة A ليست عاملية لأنها لو

كانت عاملية لكان كل عنصر غير قابل للاختزال في A أوليا في A .

خصائص 1.5.1

❶ إذا كانت A حلقة عاملية وكان $a \in A-\{0_A\}$ فإن القضيتين التاليتين متكافئتين:

- a غير قابل للاختزال في A .
- a أولي في A أي المثالي المولد بـ a أولي .

❷ كل حلقة إقليدية هي رئيسية وكل حلقة رئيسية هي حلقة عاملية .

مبرهنة 2.5.1

إذا كانت A حلقة عاملية فإن $A[x]$ هي كذلك حلقة عاملية .

برهان. انظر الكتاب ([5]) . □

6.1 كثيرات الحدود والحلقة العاملية

تعريف 1.6.1

لتكن A حلقة عاملية و $f(x) \in A[x]$ مع $\deg f \geq 1$. نضع:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in A[x]$$

نسمي القاسم المشترك الأكبر لمعاملات $f(x)$ في A بمضمون كثير الحدود $f(x)$ ونرمز له بالرمز $C(f(x))$ ونقول عن كثير الحدود $f(x)$ إنه بدائي في A إذا كـان:

$$C(f(x)) \in U(A)$$

تعريف 2.6.1

لتكن A حلقة عاملية و $f(x) \in A[x]$ مع $\deg f \geq 1$. نقول إن $f(x)$ غير قابل للاختزال في $A[x]$ إذا تحقق الشرطين:

❶ $f(x) \notin U(A[x])$ أي أن $f(x) \notin U(A)$.

❷ إذا كان $f(x) = g(x)h(x)$ فإن $g(x) \in U(A)$ أو $h(x) \in U(A)$.

أمثلة 1.6.1

❶ ليكن K حقلا تبديليا، كل كثير حدود من $K[x]$ من الدرجة الأولى غير قابل للاختزال في $K[x]$.
❷ ليكن K حقلا تبديليا، إذا كان $f(x)\in K[x]$ بحيث $\deg f(x)\leq 3$ فإن $f(x)$ غير قابل للاختزال في $K[x]$ إذا وفقط إذا كان $f(x)$ لا يقبل أي جذر في K .
❸ في $\mathbb{R}[x]$ كثيرات الحدود من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية بمميز سالب تماما غير قابلة للاختزال في $\mathbb{R}[x]$.
❹ كثير الحدود $f(x)=x$ غير قابل للاختزال في $\mathbb{Z}[x]$.
❺ كل كثير حدود من الدرجة الثالثة من $\mathbb{R}[x]$ قابل للاختزال في $\mathbb{R}[x]$.

7.1 معايير عدم قابلية الاختزال

في هذا الجزء سنتطرق إلى أهم معايير عدم قابلية الاختزال في الحلقات العاملية .

قضية 1.7.1: (معيار غوص)

ليكن $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ حيث $f(x)$ كثير حدود بدائي مع $\deg f(x)\geq 1$. لدينا التكافؤ التـالي:

$f(x)$ غ.ق.إ في $\mathbb{Z}[x]$ إذا وفقط إذا كان $f(x)$ غ.ق.إ في $\mathbb{Q}[x]$.

برهان. سوف نقوم بإثبات هذه المبرهنة في ثلاث مراحل هي على النحو التـالي :
❶ إثبات أن جداء كثيري حدود بدائيين هو كثير حدود بدائي .
(أ) ليكن p عددا أوليا . يمكن أن نتحقق بسهولة من أن التطبيق :

$$\begin{aligned}\phi_p:\quad & \mathbb{Z}[x]\longrightarrow \mathbb{Z}_p[x]\\ & \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \longmapsto \phi_p\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)=\sum_{i=0}^{n}\overline{a_i}x^i\end{aligned}$$

هو تماثل حلقات وذلك لأنه يمكننا ببساطة إثبات أن :

$$\phi_p(f+g)=\phi_p(f)+\phi_p(g)$$
$$\phi_p(fg)=\phi_p(f)\phi_p(g)$$

(ب) ليكن f و g كثيري حدود بدائيين ولنتحقق أنه من أجل p عدد أولي فإن $\phi_p(fg)\neq 0$. لدينا $\phi_p(fg)=\phi_p(f)\phi_p(g)$ ولنفرض جدلا أن $\phi_p(f)=0$ عندئذ فإن جميع معاملات كثير الحدود f تقبل القسمة على p وهذا ينتج عنه أن $C(f)\geq p$ وهذا تناقض مع كون f بدائي إذن من أجل كل p عدد أولي فإن $\phi_p(f)\neq 0$ وبالمثل بما أن g بدائي فإن $\phi_p(g)\neq 0$ إذن ومن كون $\mathbb{Z}_p[x]$ حلقة تامة لأنها حقل (p عدد أولي) فإن $\phi_p(f)\phi_p(g)\neq 0$ أي أن $\phi_p(fg)\neq 0$ وهو ما يثبت أن كثير الحدود fg بدائي .
❷ إثبات أنه من أجل كل f و g من $\mathbb{Z}[x]$ لدينا : $C(fg)=C(f)C(g)$. من الواضح أنه إذا كان كلا من g ، f و fg كثير حدود بدائي فإن:

$C(f)=1$ ، $C(g)=1$ ، $C(fg)=1$ وبالتـالي : $C(fg)=C(f)C(g)=1$.

نفرض الآن أن f و g ليسا بدائيين يوجد إذن f^* و g^* بدائيان من $\mathbb{Z}[x]$ بحيث $f=C(f)f^*$ و $g=C(g)g^*$ ومنه فإن $fg=C(f)C(g)f^*g^*$ واستنادا إلى ما أثبتناه سابقا فإن f^*g^* بدائي أي أن $C(f^*g^*)=1$ ومنه فإن $C(fg)=C(f)C(g)$ وهو المطلوب .

❸ إثبات أن P غ.ق.إ في $\mathbb{Q}[x]$ إذا وفقط إذا كان غ.ق.إ في $\mathbb{Z}[x]$. ليكن P كثير حدود من $\mathbb{Z}[x]$ ولنفرض أن $C(P)=1$. من الواضح أن P غ.ق.إ في $\mathbb{Q}[x]$ يقتضي أنه غ.ق.إ في $\mathbb{Z}[x]$. لنثبت العكس. من أجل ذلك نفرض أن P قابل للاختزال في $\mathbb{Q}[x]$ أي نفرض أن $P=P_1P_2$ حيث $\deg P_1\geq 1$ و $\deg P_2\geq 1$ و P_1 و P_2 من $\mathbb{Q}[x]$. بفرض α_1 المضاعف المشترك الأصغر لمقامات معاملات كثير الحدود P_1 و α_2 المضاعف المشترك الأصغر لمقامات معاملات كثير الحدود P_2 فإن كثيري الحدود $T_1=\alpha_1P_1$ و $T_2=\alpha_2P_2$ هما عنصران من $\mathbb{Z}[x]$ و $T_1T_2=\alpha_1\alpha_2P$ ولأن P بدائي فإن $C(T_1)C(T_2)=\alpha_1\alpha_2$ ولكن $T_1=C(T_1)T_1^*$ و $T_2=C(T_2)T_2^*$ و T_1^* و T_2^* هما عنصران من $\mathbb{Z}[x]$. نستنتج إذن أن $P=T_1^*T_2^*$ أي أن قابل للاختزال في $\mathbb{Z}[x]$. □

يمكن تعميم القضية السابقة على النحو التالي:

قضية 2.7.1: (تعميم معيار غوص)

لتكن A حلقة عاملية و K حقل كسورها وليكن $f(x)\in A[x]$ حيث $f(x)$ كثير حدود بدائي مع $\deg f(x)\geq 1$. لدينا التكافؤ التـالي :

$f(x)$ غ.ق.إ في $A[x]$ إذا وفقط إذا كان $f(x)$ غ.ق.إ في $K[x]$.

نظرية 1.7.1: (معيار إيزنستاين)

لتكن A حلقة عاملية وليكن $f(x)\in A[x]$ بحيث $\deg f(x)\geq 1$ و $C(f(x))=1$. نضع:

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n\in A[x]$$

إذا وجد p من A غير قابل للاختزال ويحقق التوفيقات التالية:

$$\begin{cases} a_0\not\equiv 0[p^2] \\ a_n\not\equiv 0[p] \\ a_i\equiv 0[p], \quad \forall i\in[[0,n-1]] \end{cases}$$

فإن $f(x)$ غير قابل للإختزال في $A[x]$ وبالتالي غير قابل للاختزال في $K[x]$.

برهان. لإثبات هذه النظرية، نستعمل نمط البرهان بالخلف . نفرض أن كل التوفيقات محققة وأن $f(x)$ قـابل للإختـزال في $A[x]$.

$f(x)$ قابل للاختزال في $A[x]$، إذن يوجد $g(x)$ و $h(x)$ من $A[x]$ بحيث :

$$\deg g(x)\geq 1 \text{ ، } \deg h(x)\geq 1 \quad \text{و} \quad f(x)=g(x)h(x) .$$

نضع:

$$g(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_rx^r\in A[x]$$

و

$$h(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_tx^t\in A[x]$$

حيث: $1\le r\le t<n$ و $r+t=n$. من كون $f(x)=g(x)h(x)$، بعد المطابقة نجد المعادلات الجبرية التالية :

$$a_0=b_0c_0$$
$$a_1=b_0c_1+b_1c_0$$
$$\vdots$$
$$a_r=b_0c_r+b_1c_{r-1}+\ldots+b_rc_0$$
$$\vdots$$
$$a_t=b_0c_t+b_1c_{t-1}+\ldots+b_rc_{t-r}$$
$$\vdots$$
$$a_n=b_rc_t$$

ومن الفرضيات، لدينا: $a_0\equiv 0[p]$، إذن p يقسم a_0 وبالتالي p يقسم b_0c_0 ولكن p^2 لا يقسم a_0 ومنه p^2 لا يقسم b_0c_0 وبالتالي:

$$\begin{cases}(p\mid b_0)\ \text{و}\ (p\nmid c_0)\\ \text{أو}\\ (p\mid c_0)\ \text{و}\ (p\nmid b_0)\end{cases}$$

(أ) إذا كان $(p\nmid c_0)$ و $(p\mid b_0)$ فإنه يوجد β من A بحيث: $b_0=\beta p$ ومن جهة أخرى ولكون $a_1\equiv 0[p]$ فإن:

$$\begin{aligned}(p\mid a_1)&\Longrightarrow(p\mid(b_0c_1+b_1c_0))\\&\Longrightarrow\exists\alpha\in A:b_0c_1+b_1c_0=\alpha p\\&\Longrightarrow\exists\alpha\in A:b_1c_0=\alpha p-b_0c_1\\&\Longrightarrow\exists\alpha\in A:b_1c_0=\alpha p-\beta pc_1\\&\Longrightarrow\exists\alpha\in A:b_1c_0=p(\alpha-\beta c_1)\\&\Longrightarrow(p\mid b_1c_0)\end{aligned}$$

وبما أن p لا يقسم c_0 فإن p يقسم b_1 وهكذا بأخذ $(p\mid a_2)$، $(p\mid a_3)$،....، $(p\mid a_{n-1})$ نحصل على $(p\mid b_2)$، $(p\mid b_3)$،....، $(p\mid b_r)$ وبالتالي فإن $(p\mid b_rc_t)$ ومنه $(p\mid a_n)$ وهذا يعني أن $a_n\equiv 0[p]$ وهوتناقض مع الفرضية $a_n\not\equiv 0[p]$.

(ب) إذا كان $(p\nmid b_0)$ و $(p\mid c_0)$ نحصل على نفس النتيجة السابقة . □

نظرية 2.7.1: (المعيار الثـاني)

لتكن A و B حلقتين تبديليتين تامتين و $\varphi \in \hom(A,B)$ ولنعتبر تماثل الحلقات:

$$\begin{aligned} \sigma : \quad A[x] &\longrightarrow B[x] \\ f(x) &\longmapsto \sigma(f(x)) \end{aligned}$$

المعرف بـ :

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \longmapsto \sigma(f(x))=\sum_{i=0}^{n} \varphi(a_i)\, x^i$$

إذا كان $f(x)\in A[x]$ بحيث $\deg f(x)\geq 1$ و $\deg \sigma(f(x))=\deg f(x)$ فإن:

$\sigma(f(x))$ غ.ق.إ في $B[x]$ يستلزم $f(x)$ غ.ق.إ في $A[x]$.

برهان. نبرهن باستعمال العكس النقيض . نفرض أن $f(x)$ قابل للاختزال في $A[x]$، عندئذ يوجد $g(x)$ و $h(x)$ من $A[x]$ بحيث:

$$f(x)=g(x)h(x) \quad \text{مع} \quad \deg g(x)\geq 1 \quad \text{و} \quad \deg h(x)\geq 1$$

بما أن σ تماثل فـإن:

$$\sigma(f(x))=\sigma(g(x)h(x))=\sigma(g(x))\sigma(h(x))$$

ومنه يكون لدينـا:

$$\deg \sigma(f(x))=\deg \sigma(g(x))+\deg \sigma(h(x))$$

لأن الحلقة B تامة ومن الفرضية $\deg \sigma(f(x))=\deg f(x)$، ينتج أن:

$$\deg f(x)=\deg \sigma(g(x))+\deg \sigma(h(x))$$

ومن جهة أخرى ولأن الحلقة A تامة، ينتج لدينا:

$$\deg f(x)=\deg g(x)+\deg h(x)$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$\deg g(x)+\deg h(x)=\deg \sigma(g(x))+\deg \sigma(h(x))$$

ولكـن $\deg g(x)\geq \deg \sigma(g(x))$ ومـنه فـإن $\deg h(x)\leq \deg \sigma(h(x))$ ولديـنا أيضـا $\deg h(x)\geq \deg \sigma(h(x))$ إذن $\deg h(x)=\deg \sigma(h(x))$ وهـذا مـا ينتـج عنـه أن : $\deg g(x)=\deg \sigma(g(x))$ فنكون بذلك قد أثبتنا أن:

$$\sigma(f(x))=\sigma(g(x))\sigma(h(x)) \quad \text{مع} \quad \deg \sigma(g(x))\geq 1 \quad \text{و} \quad \deg \sigma(h(x))\geq 1$$

وهو مـايعني أن $\sigma(f(x))$ قـابل للاختزال في $B[x]$.

□

ملاحظة 1.7.1

عموما من أجل كل $f(x)\in A[x]$ فإن $\deg\sigma(f(x))\leq\deg f(x)$ لأنه:

❶ في حالة $\varphi(a_n)\neq 0$ فإن $\deg\sigma(f(x))=\deg f(x)$.

❷ في حالة $\varphi(a_n)=0$ فإن $\deg\sigma(f(x))<\deg f(x)$.

نظرية 3.7.1: (المعيار الثالث)

لتكن A حلقة عاملية و (a,b) ثنائية من A^2 حيث: $a\neq 0$ و $f(x)\in A[x]$ بحيث: $\deg f(x)\geq 1$.
نضع: $g(x)=f(ax+b)$، عندئذ يكون لدينا:

$f(x)$ غ.ق.إ في $A[x]$ إذا وفقط إذا كان $g(x)$ غ.ق.إ في $A[x]$.

برهان. مبدئيا نلاحظ أن: $\deg f(x)=\deg g(x)$ ولنبين الاستلزامين التاليين:

(أ) نبين الاستلزام الأول: نفرض أن $f(x)$ قابل للاختزال في $A[x]$، عندئذ يوجد $h_1(x)$ و $h_2(x)$ من $A[x]$ بحيث :

$$f(x)=h_1(x)h_2(x) \quad \text{مع} \quad \deg h_1(x)\geq 1 \quad \text{و} \quad \deg h_2(x)\geq 1$$

ومنه يوجد $h_3(x)$ و $h_4(x)$ من $A[x]$ بحيث :

$$g(x)=h_3(x)h_4(x) \quad \text{مع} \quad h_3(x)=h_1(ax+b) \quad \text{و} \quad h_4(x)=h_2(ax+b)$$

حيث: $\deg h_1(x)=\deg h_3(x)\geq 1$ و $\deg h_2(x)=\deg h_4(x)\geq 1$ وهذا يعني أن:

$g(x)$ قابل للاختزال في $A[x]$.

(ب) نبين الاستلزام الثاني: نفرض أن $g(x)$ قابل للاختزال في $A[x]$ ، عندئذ يوجد $k_1(x)$ و $k_2(x)$ من $A[x]$ بحيث :

$$g(x)=k_1(x)k_2(x) \quad \text{مع} \quad \deg k_1(x)\geq 1 \quad \text{و} \quad \deg k_2(x)\geq 1$$

ومنه

$$k_1(x)k_2(x)=g(x)=f(ax+b)$$

وبما أن $a\neq 0$، فنكتب $f(x)$ على الشكل:

$$f(x)=f\left(a\left(\frac{x}{a}-\frac{b}{a}\right)+b\right)$$

إذن:

$$f(x)=g\left(\frac{x}{a}-\frac{b}{a}\right)=k_1\left(\frac{x}{a}-\frac{b}{a}\right)k_2\left(\frac{x}{a}-\frac{b}{a}\right)\in K[x]$$

حيث K هو حقل كسور الحلقة A وهذا يعني أن $f(x)$ قابل للإختزال في $K[x]$ ومن كون A عاملية ونظرية سابقة ينتج أن:

$f(x)$ قابل للاختزال في $A[x]$.

□

8.1 تمارين مقترحة حول الفصل الأول

التمرين 01:

❶ لتكن A و B حلقتين رئيسيتين بحيث A حلقة جزئية من B حيث $(1_A = 1_B = 1,\ 0_A = 0_B = 0)$ وليكن a و b عنصران من $A-\{0\}$. نضع: $d = \gcd_A(a,b)$ القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b في الحلقة A و $D = \gcd_B(a,b)$ القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b في الحلقة B . برهن أن d و D متشاركان في الحلقة B .

❷ ليكن K حقلا جزئيا من $\mathbb{C}$ و $f(x)$ و $g(x)$ من $K[x]$ حيث $\deg f(x) \geq 1$ و $\deg g(x) \geq 1$ وليكن $d(x) = \gcd_{K[x]}(f(x), g(x))$ القاسم المشترك الأكبر لكثيري الحدود $f(x)$ و $g(x)$ في الحلقة $K[x]$. برهن أنه من أجل كل E حقلا جزئيا من $\mathbb{C}$ بحيث $K \subset E$ فإن : $\deg d(x) = \deg \gcd_{E[x]}(f(x), g(x))$ ثم استنتج أن :

$$\gcd_{K[x]}(f(x), g(x)) = 1 \Longleftrightarrow \gcd_{E[x]}(f(x), g(x)) = 1$$

❸ ليكن K حقلا جزئيا من $\mathbb{C}$ و $f(x)$ و $g(x)$ من $K[x]$ حيث $\deg f(x) \geq 1$ و $\deg g(x) \geq 1$. نفرض أن $f(x)$ و $g(x)$ يقبلان جذرا مشتركا وحيدا α في $\mathbb{C}$. برهن أن α عنصرا من K .

التمرين 02:

ليكن p عددا أوليا و $n \geq 1$ عددا طبيعيا لا يقبل القسمة على p .

❶ برهن مـا يـلي :

$$U(\mathbb{Z}_p) = \{\overline{x} \in \mathbb{Z}_p : \gcd(x,p) = 1\}.$$

❷ برهن أن كثير الحدود $p(x) = x^n - 1$ ومشتقه أوليان فيما بينهما في $\mathbb{Z}_p[x]$.

❸ استنتج أنه لا يمكن كتابة $p(x)$ على الشكل:

$p(x) = [a(x)]^2 b(x)$ حيث $a(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ و $b(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$.

التمرين 03:

ليكن كثير الحدود $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ في $\mathbb{Z}[x]$ مع $a_0 \neq 0$ و $a_n \neq 0$ ولنفرض أن $p(x)$ يقبل جذرا ناطقا $r = \frac{p}{q}$ حيث : $\gcd(p,q) = 1$.

❶ بين أن p يقسم $a_0 \neq 0$ وأن q يقسم $a_n \neq 0$.

❷ أوجد الجذور الناطقة لكثيرات الحدود التـالية :

$$q(x) = 6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4$$

$$r(x) = 2x^3 + 12x^2 + 13x + 15$$

$$s(x) = 6x^5 + 11x^4 - x^3 + 5x - 6$$

التمرين 04:

ليكن $f(x)$ و $g(x)$ كثيري حدود من $\mathbb{R}[x]$ بحيث:

$$\begin{cases} g(x+1) - g(x) = x \\ \text{و} \\ (\deg g(x) = 2) \quad \text{و} \quad (g(0) = 1) \end{cases} \qquad \text{و} \qquad \begin{cases} f(x+1) - f(x) = x^2 \\ \text{و} \\ (\deg f(x) = 3) \quad \text{و} \quad (f(0) = 1) \end{cases}$$

❶ عين كثيري الحدود $f(x)$ و $g(x)$.
❷ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $f(x)=0$.
❸ بين أن كثيري الحدود $f(x)$ و $g(x)$ أوليان فيما بينهما في $\mathbb{R}[x]$.
❹ بين أنه توجد ثنائية وحيدة $(u(x),v(x))$ من كثيرات الحدود من $\mathbb{R}[x]$ تحقق:

$$\begin{cases} u(x)f(x)+v(x)g(x)=1 \\ (\deg u(x)<\deg g(x)) \quad و \quad (\deg v(x)<\deg f(x)) \end{cases}$$

❺ عين كثير حدود $h(x)$ من $\mathbb{R}[x]$ درجته أقل أو تساوي 2 ويحقق:

$f(x)=h(x)(x-1)^n+x^3k(x)$ حيث $k(x)$ كثير حدود من $\mathbb{R}[x]$

ثم عين صراحة $k(x)$ وذلك من أجل $n=2$.

التمرين 05:

نعتبر كثيري الحدود $p(x)$ و $q(x)$ من $\mathbb{C}[x]$ المعرفين بـ :

$$p(x)=2x^3-x^2-7x+\lambda \quad و \quad q(x)=x^3-7x+\mu$$

❶ عين λ بحيث مجموع جذرين لـ $p(x)$ يساوي 1 ثم حل المعادلة : $p(x)=0$.
❷ عين قيم μ بحيث أحد جذور $q(x)$ ضعفا لجذر آخر لـ $q(x)$.

التمرين 06:

عين مجموعة كثيرات الحدود في $\mathbb{R}[x]$ الواحدية من الدرجة 4 والتي لواحق جذورها في $\mathbb{C}$ تشكل مربعا في المستوي .

التمرين 07:

نعتبر في $\mathbb{C}[x]$ كثير الحدود $g(x)$ المعرف كما يلي :

$$g(x)=x^3+x-2\in\mathbb{C}[x]$$

❶ تأكد أن المعادلة : $g(x)=0$ تقبل حلا حقيقيا واحدا .
❷ باستعمال قوانين Cardan حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $g(x)=0$.
❸ استنتج المساواة :

$$\sqrt{3}=\sqrt[3]{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}}-\sqrt[3]{2\sqrt{7}-3\sqrt{3}}$$

التمرين 08:

ليكن K حقلا جزئيا من $\mathbb{C}$ و $f(x),g(x)\in K[x]$ حيث $\deg(f)\geq 1$، $\deg(g)\geq 1$ و f و g يقبلان جذرا مشتركا α في الحقل $\mathbb{C}$.

❶ نفرض أن أحدهما f أو g غير قابل للاختزال في $K[x]$. برهن أنه يقسم الآخر.
❷ نفرض أن كلا من f و g غير قابل للاختزال في $K[x]$. برهن أنهما متشاركان.
❸ نفرض أن كلا من f و g غير قابل للاختزال في $K[x]$ وواحدي. برهن أنهما متساويان.

التمرين 09:

ليكن p عددا أوليا.

❶ برهن أنه من أجل كل $k=\overline{1:p-1}$ فان p يقسم العددالطبيعي $C_p{}^k=\frac{p!}{k!(p-k)!}$.

❷ برهن أن: $x^{p-1}+x^{p-2}+...+x+1$ غير قابل للاختزال في $\mathbb{Z}[x]$ و $\mathbb{Q}[x]$.

9.1 حلول بعض تمارين الفصل الأول

التمرين 01:

ليكن A و B حلقتين رئيستين و $A\subseteq B$ $(1_A=1_B=1, 0_A=0_B=0)$ وليكن $a,b\in A-\{0\}$. نضع:

$$d=pgcd_A(a,b) \text{ و } D=pgcd_B(a,b)$$

❶ إثبات أن d و D متشاركان في الحلقة B. بما أن A حلقة رئيسية و $d=pgcd_A(a,b)$ فإن $(a)_A+(b)_A=(d)_A$ حيث $(a)_A$ هي المثالي المولد بـ a أي مضاعفات a في A ونفس الشي بالنسبة لـ $(b)_A$ و $(d)_A$ ونكتب:

$$(a)_A=\{\alpha_1 a \,/\, \alpha_1\in A\}\ ,\ (b)_A=\{\alpha_2 b \,/\, \alpha_2\in A\}\ ,\ (d)_A=\{\alpha_3 d \,/\, \alpha_3\in A\}$$

كذلك بما أن B حلقة رئيسية و $D=pgcd_B(a,b)$ فإن $(a)_B+(b)_B=(D)_B$ حيث $(a)_B$ هي المثالي المولد بـ a أي مضاعفات a في B ونفس الشي بالنسبة لـ $(b)_B$ و $(D)_B$ ونكتب:

$$(a)_B=\{\beta_1 a \,/\, \beta_1\in B\}\ ,\ (b)_B=\{\beta_2 b \,/\, \beta_2\in B\}\ ,\ (D)_B=\{\beta_3 D \,/\, \beta_3\in B\}$$

لإثبات أن d و D متشاركان في الحلقة B نثبت أن d يقسم D في B و D يقسم d في B. بما أن كلا من الحلقة A و B رئيسية فإن $(a)_A+(b)_A=(d)_A$ و $(a)_B+(b)_B=(D)_B$ وبما أن الحلقة A واحدية $(1_A\in A)$ فإن $d\in(d)_A$ وذلك لأن $d=1_A d$ ومنه فإن $d\in(d)_A=(a)_A+(b)_A$ وبالتالي يوجد $x_1\in(a)_A$ و $x_2\in(b)_A$ بحيث:

$$d=x_1+x_2=\alpha_1 a+\alpha_2 b\ ,\ \alpha_1,\alpha_2\in A$$

وبما أن $A\subseteq B$ فإن α_1 وα_2 عنصران من B و $d=\alpha_1 a+\alpha_2 b$ أي أن $d\in(D)_B=(a)_B+(b)_B$ وهذا ينتج عنه وجود $\gamma\in B$ بحيث $d=\gamma D$ أي أن D يقسم d في B.

بما أن $A\subseteq B$ فإن d قاسم مشترك لـ a وb في B و D هو أكبر هذه القواسم لأن $D=pgcd_B(a,b)$ ومنه فان d يقسم D في B وبالتالي فإن d و D متشاركان في B.

❷ ليكن K حقلا جزئيا من $\mathbb{C}$ و $f(x),g(x)\in K[x]$ حيث: $\deg(f)\geq 1$ و$\deg(g)\geq 1$. وليكن $d(x)=pgcd_{K[x]}(f(x),g(x))$. نريد إثبات أنه من أجل كل E حقلا جزئيا من $\mathbb{C}$ بحيث $K\subseteq E$ فإن:

$$\deg(d(x))=\deg({}_{E[x]}(f(x),g(x))$$

بما أن كلا من K و E حقلا فإن كلا من $K[x]$ و $E[x]$ حلقة رئيسية وأكثر من ذلك هما حلقتان واحديتان ومنه بالاعتماد على جواب السؤال الأول يكون $d(x)$ و $D(x)=pgcd_{E[x]}(f(x),g(x))$ متشاركان في $E[x]$ وبالتالي يوجد $\mu(x)\in U(E[x])=U(E)$ بحيث $D(x)=\mu(x)d(x)$ ولأن $E[x]$ حلقة تامة و $\deg\mu(x)=0$ فإن:

$$\deg D(x)=\deg(\mu(x)d(x))=\deg\mu(x)+\deg d(x)=\deg d(x)$$

❸ استنتاج أن: $pgcd_{K[x]}(f(x),g(x))=1\Leftrightarrow pgcd_{E[x]}(f(x),g(x))=1$. يكون f و g أوليان فيما بينهما في

$K[x]$ إذا وفقط إذا كانت القواسم المشتركة لهما هي العناصر القابلة للقلب فقط في K . لدينا إذن:

$$pgcd_{K[x]}(f(x),g(x))=1 \Longleftrightarrow d(x)\in U(K[x])=U(K)=K-\{0\}$$
$$\Longleftrightarrow \deg d(x)=0$$
$$\Longleftrightarrow \deg D(x)=0$$
$$\Longleftrightarrow D(x)\in E-\{0\}$$
$$\Longleftrightarrow pgcd_{E[x]}(f(x),g(x))=1$$

التمرين 02:

❶ لنبين أن: $U(\mathbb{Z}_p)=\left\{\overline{x}\in\mathbb{Z}_p:(x,p)=1\right\}$. نفرض أن $(x,p)=1$ حسب مبرهنة بيزوت فإنه توجد ثنائية $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ بحيث $ux+vp=1$. بالمرور الى أصناف التكافؤ نحصل على $\overline{ux+vp}=\overline{1}$ أي أن $\overline{ux}+\overline{vp}=\overline{1}$ أي أن $\overline{ux}=\overline{1}$ ومنه فإن $\overline{x}$ قابل للقلب في $\mathbb{Z}_p$ ومقلوبه هو $\overline{u}$.

عكسيا إذا وجد $u\in\mathbb{Z}$ بحيث $\overline{ux}=\overline{ux}=\overline{1}$ فإنه يوجد $v\in\mathbb{Z}$ بحيث $ux-1=vp$ أي أن $ux+vp=1$ وهذا يعني أن $(x,p)=1$. نكتب إذن $U(\mathbb{Z}_p)=\left\{\overline{x}\in Z_p:(x,p)=1\right\}$.

❷ إثبات أن كثير الحدود $p(x)=x^n-1$ ومشتقه أوليان فيما بينهما في $\mathbb{Z}_p[x]$. لدينا: $p(x)=x^n-1$ و $p'(x)=\overline{n}x^{n-1}$ ومنه فإن $\overline{n}\in U(\mathbb{Z}_p)$ ولأن n أولي مع p فإن $xp'(x)-\overline{n}p(x)=\overline{n}$ وبالتالي فإن $p(x)$ و $p'(x)$ أوليان بينهما في $\mathbb{Z}_p[x]$.

نفرض أن $p(x)=[a(x)]^2b(x)$ حيث $a(x)\in\mathbb{Z}_p[x]$ و $b(x)\in\mathbb{Z}_p[x]$. عندئذ يكون لدينا: $p'(x)=a(x)[2a'(x)b(x)+a(x)b'(x)]$ وبالتالي فإن $a(x)$ قاسم مشترك لـ $p(x)$ و $p'(x)$ في $\mathbb{Z}_p[x]$ وهذا تناقض مع كون $p(x)$ و $p'(x)$ أوليان بينهما في $\mathbb{Z}_p[x]$ ومنه لا يمكن كتابة $p(x)$ من الشكل:

$p(x)=[a(x)]^2b(x)$ حيث: $a(x)\in\mathbb{Z}_p[x]$ و $b(x)\in\mathbb{Z}_p[x]$.

التمرين 03:

❶ إثبات أن p يقسم $a_0\neq 0$ وأن q يقسم $a_n\neq 0$. لدينا: $p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ في $\mathbb{Z}[x]$ مع $a_0\neq 0$ و $a_n\neq 0$. نكتب: $p(r)=p(\frac{p}{q})=0$ ونأخذ q^n كمقام مشترك فنجد:

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\ldots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0 \qquad (11.1)$$

ومنه بنقل a_0q^n إلى الطرف الأيمن من (11.1) نجد:

$$p\left(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+\ldots+a_1q^{n-1}\right)=-a_0q^n$$

ومنه p يقسم a_0q^n وبما أن p و q أوليان فيما بينهما فإنه حسب غوص p يقسم a_0. بنفس الطريقة بنقل a_np^n إلى الطرف الأيمن من المساواة (11.1) نجد:

$$q\left(a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1pq^{n-2}+a_0q^{n-1}\right)=-a_np^n$$

ومنه q يقسم a_np^n وبما أن q و p أوليان فيما بينهما فإنه حسب غوص q يقسم a_n.

❷ تطبيقات: إيجاد الجذور الناطقة لكل من كثيرات الحدود $q(x)$ و $r(x)$ و $s(x)$. تترك هذه التطبيقات للطالب.

التمرين 05:

نعتبر كثيري الحدود $p(x)$ و $q(x)$ من $\mathbb{C}[x]$ المعرفين بـ:

$$q(x)=x^3-7x+\mu \text{ و } p(x)=2x^3-x^2-7x+\lambda$$

❶ تعيين λ بحيث مجموع جذرين لـ $p(x)$ يساوي 1 ثم حل المعادلة: $p(x)=0$. نرمز بـ x_1، x_2 و x_3 لجذور $p(x)$ ونفرض مثلا أن $x_1+x_2=1$. من العلاقة بين المعاملات والجذور ينتج لدينا: $x_1+x_2+x_3=1/2$ ومنه فإن $x_3=-1/2$ وبالتالي بالقسمة الاقليدية لـ $p(x)$ على $2x+1$ نجد: $p(x)=(2x+1)(x^2-x-3)+\lambda+3$ وبما أن $p(-1/2)=0$ فإننا نجد أن $\lambda+3=0$ أي أن $\lambda=-3$ وهي قيمة λ المطلوبة.
بحل المعادلة: $(2x+1)(x^2-x-3)=0$ نجد: $x_1=-1/2$ و $x_2=(1-\sqrt{13})/2$ و $x_3=(1+\sqrt{13})/2$.
❷ تعيين قيم μ بحيث أحد جذور $q(x)$ ضعفا لجذر آخر لـ $q(x)$. نرمز بـ x_1، x_2 و x_3 لجذور $q(x)$ وبفرض مثلا أن $x_2=2x_1$ فإنه من العلاقة بين المعاملات والجذور ينتج لدينا: $x_3=-3x_1$. لدينا كذلك

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-7\Longrightarrow x_1^2=1\Longrightarrow (x_1=-1)\ \vee\ (x_1=1)$$

ومنه إذا كان $x_1=1$ فإن $x_2=2$ و $x_3=-3$ وفي هذه الحالة نجـــد: $\mu=6$.
وإذا كـان $x_1=-1$ فإن $x_2=-2$ و $x_3=3$ وفي هذه الحالة نجـــد: $\mu=-6$.

التمرين 06:

لنعين مجموعة كثيرات الحدود في $\mathbb{R}[x]$ الواحدية من الدرجة 4 والتي لواحق جذورها في $\mathbb{C}$ تشكل مربعا في المستوي. لديـــنا:

$$f(x)=x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0:\ a_3,a_2,a_1,a_0\in\mathbb{R}$$

بما أن مركز المربع يقع على محور الفواصل وذلك لأن مجموع جذور $f(x)$ يساوي a_3 و a_3 عدد حقيقي فإننا نميز حالتين وهما:
الحالة الأولى: حالة الجذور الأربعة مركبة (عقدية) ولتكن هي $\alpha_1=a+ib$، $\alpha_2=\overline{\alpha_1}$، $\alpha_3=a'+ib'$ و $\alpha_4=\overline{\alpha_3}$ صور النقط A، B، D و C على الترتيب فيكون لدينا:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\\ AD=AB\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}a'=a+2b\\ b'=b\end{cases}$$

وبالتالي كثير الحدود $f(x)$ يكتب من الشكل:

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)\\&=[x-(a+ib)][x-(a-ib)][x-(a+2b)-ib][x-(a+2b)+ib]\end{aligned}$$

ونجـــد أن:

$$f(x)=\left[(x-a)^2+b^2\right]\left[(x-(a+2b))^2+b^2\right]$$ مع a و b عددان حقيقيان.

الحالة الثانية: حالة جذرين حقيقين وجذرين مركبين. (تترك هذه الحالة للطالب).

التمرين 06:

ليكن K حقلا جزئيا من L و $f(x),g(x)\in K[x]$ حيث $\deg(f)\geq 1$، $\deg(g)\geq 1$ و f و g يقبلان جذرا مشتركا α في الحقل L.
❶ نفرض أن $f(x)$ غير قابل للاختزال في $K[x]$. لديـــنا: $f(x),g(x)\in K[x]\subseteq L[x]$ ومنه بوضـــع:

$$\mathrm{D(x)}=\ pgcd_{L[x]}(f(x),g(x))\text{ و }d(x)=\ pgcd_{K[x]}(f(x),g(x))$$

وبالأخذ بعين الاعتبار أن α جذرا مشتركا لـ $f(x)$ و $g(x)$ في L فإن $x-\alpha$ قاسما مشتركا لـ $f(x)$ و $g(x)$ في $L[x]$ ومنه تصبح لدينا المعلومات التـالية:

❶ $d(x)$ يقسم $f(x)$ في $K[x]$.

❷ $\deg d(x)=\deg D(x)\geq 1$ (حسب جواب السؤال الثاني من التمرين الأول)

❸ $f(x)$ غير قابل للاختزال في $K[x]$

والتي ينتج عنها وجود $\lambda\in U(K[x])=U(K)$ بحيث $f(x)=\lambda d(x)$ ومنه فإن $d(x)=\nu f(x)$ حيث: $\lambda\nu=1$ وبالتـالي $d(x)$ يقسم $g(x)$ في $K[x]$ أي أن $\nu f(x)$ يقسم $g(x)$ ومنه $f(x)$ يقسم $g(x)$ في $K[x]$ وهو المطلوب.

❷ بفرض أن كلا من $f(x)$ و $g(x)$ غير قابل للاختزال في $K[x]$ فإنه من جواب السؤال السابق ينتج لدينا: $f(x)$ يقسم $g(x)$ و $g(x)$ يقسم $f(x)$ أي أن $f(x)$ و $g(x)$ متشاركان في $K[x]$ أي أنه يوجد $\lambda\in U(K)$ بحيث:

$$f(x)=\lambda g(x).$$

❸ إذا كان كلا من $f(x)$ و $g(x)$ غير قابل للاختزال في $K[x]$ وواحدي فإن $\lambda=1$ و$f(x)$ و $g(x)$ متساويان.

التمرين 09:

p عـــــدد أولـــي

❶ برهان أنه من أجل كل $k=\overline{1:p-1}$ فإن p يقسم العـــدد الطبيـــعي $C_p^{\,k}=\frac{p!}{k!(p-k)!}$. لديـــــــنا: $p!=k!(p-k)!C_p^{\,k}$ أي أن $p(p-1)!=k!(p-k)!C_p^{\,k}$ و منه فإن p يقسم $k!(p-k)!$ وبما أن p أولي مع $k!(p-k)!$ وذلك لأنه أولي مع كل من $k!$ و $(p-k)!$ فإنه وحسب مبرهنة غوص p يقسم $C_p^{\,k}$ وذلك من أجل كل $k=\overline{1:p-1}$.

❷ برهان أن: $f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$ غير قابل للاختزال في $\mathbb{Z}[x]$ و $\mathbb{Q}[x]$. لدينا: $f(x)=\frac{x^p-1}{x-1}$ ومنه بوضع: $g(x)=f(x+1)=\frac{(x+1)^p-1}{x}$ واستعمال دستور ثنائي الحد لحساب $(x+1)^p$ نجد:

$$g(x)=C_p^1+C_p^2x+\ldots+C_p^{p-1}x^{p-2}+x^{p-1}$$

من جواب السؤال السابق برهنا أن p يقسم $C_p^{\,k}$ وذلك من أجل كل $k=\overline{1:p-1}$ ولدينا p لا يقسم $a_n=1$ وكذلك p^2 لا يقسم $C_p^{\,1}=p$ ومنه وحسب معيار ايزنستاين فـإن $g(x)$ غير قابل للاختزال في $\mathbb{Z}[x]$ وحسب المعيار الثالث فإن $f(x)$ غير قابل للاختزال في $\mathbb{Z}[x]$ وبالتالي فإن $f(x)$ غير قابل للاختزال في $\mathbb{Q}[x]$ وهو المطلوب.



الفصل الثاني

مدخل إلى التوسيعات الجبرية



في هذا الفصل سنتطرق إلى التوسيعات الجبرية وبعض النظريات الأساسية في موضوع التوسيعات وسنهتم بشكل خاص بالتوسيع الجالوازي والزمرة الجالوازية .

1.2 مفاهيم أولية

سوف نتطرق في هذا الجزء إلى بعض المفاهيم الأولية .

تعريف 1.1.2

ليكن L حقلا و $K \subset L$، بحيث $K \neq \emptyset$. نقول عن K حقل جزئي من L إذا تحقق الشـــرطيـن:

❶ من أجل كل $x, y \in K$ فإن $0_K \in K$ و $x - y \in K$.

❷ من أجل كل $x, y \in K$ و $y \neq 0_K$ فإن $1_K \in K$ و $xy^{-1} \in K$.

تعريف 2.1.2

ليكن E و K حقلين تبديليين. نقول إن E توسيع لـ K إذا كان K حقلا جزئيا من E ونكتب $K \subset L$ أو $K - E$ ونقـــرأ: « E توسيع لـ K » .

أمثلة 1.1.2

❶ لديـنا التوسيعين التاليـن: $\mathbb{Q} - \mathbb{R}$ و $\mathbb{R} - \mathbb{C}$.

❷ لديـــنا كذلـك: $\mathbb{Q} - E_1 - E_2$ حيث:

$$E_1 = \{a + b\sqrt{2} / \ a, b \in \mathbb{Q}\} \quad \text{و} \quad E_2 = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} / \ a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

تعريف 3.1.2

ليكن K و E حقلين تبديليين بحيث $K - E$. يمكن اعتبار E كفضاء شعاعي على K ونسمي $\dim_K E$ درجة التوسيع E ونرمز لها بـ $\dim_K E = [E : K]$.

أمثلة 2.1.2

❶ $\mathbb{C}$ هو توسيع لـ $\mathbb{R}$ درجته 2 ونكتب: $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$. أساس $\mathbb{C}$ باعتباره فضاء شعاعيا على $\mathbb{R}$ هو $B_{\mathbb{C}} = \{1, i\}$ ونكتب: $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

❷ E_1 هو توسيع لـ $\mathbb{Q}$ درجته 2 ونكتب: $[E_1 : \mathbb{Q}] = 2$. أساس E_1 باعتباره فضاء شعاعيا على $\mathbb{Q}$ هو $B_{E_1} = \{1, \sqrt{2}\}$ ونكتب: $E_1 \cong \mathbb{Q}^2$.

❸ $\mathbb{R}$ هو توسيع لـ $\mathbb{Q}$ درجته غير منتهية لأنه في حالة العكس أي إذا كان $[\mathbb{R}:\mathbb{Q}]=m$ مع $m\in\mathbb{N}^*$ فإن $\mathbb{R}\cong\mathbb{Q}^m$ وبما أن $\mathbb{Q}$ قابلة للعد فإن $\mathbb{R}$ قابلة للعد وهذا تناقض.

تعاريف 1.1.2

ليكن E توسيعا لـ K .

❶ نسمي توسيعا بسيطا للحقل K كل توسيع E لـ K مولد بعنصر واحد θ من E ونكتب: $E=K[\theta]$ وهو أيضا أصغر حقل يحوي الحقل K والعنصر θ.

❷ كل حقل جزئي من K يختلف عن K يسمى حقلا جزئيا ذاتيا من K .

❸ نقول عن الحقل K إنه أولي إذا كان لا يحوي أي حقل جزئي إلا نفسه.

أمثلة 3.1.2

الحقلان $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}_p$ حيث p أولي هما حقلان أوليان.

برهان. بما أن H حقلا جزئيا من $\mathbb{Q}$ فواضح أن $H\subset\mathbb{Q}$ ولنبرهن أن $\mathbb{Q}\subset H$. بما أن H حقلا فإن $1\in H$، $-1\in H$ و $0\in H$. ليكن $n\in\mathbb{Z}$، لدينا:

$$n=\begin{cases}\underbrace{(1)+(1)+\ldots+(1)}_{n\text{ مرة}} & \text{إذا كان } n>0\\ 0 & \text{إذا كان } n=0\\ \underbrace{(-1)+(-1)+\ldots+(-1)}_{(-n)\text{ مرة}} & \text{إذا كان } n<0\end{cases}$$

ومنه $n\in H$ وبالتالي $\mathbb{Z}\subset H$. ليكن $a=\frac{p}{q}$ بحيث $p\in\mathbb{Z}$، $q\in\mathbb{Z}^*$ و $(p,q)=1$، لدينا: $a=pq^{-1}\in H$ لأن $p\in H$ و $q^{-1}\in H$ (وذلك لأن H حقلا) ومنه نحصل على $\mathbb{Q}\subset H$ وبالتالي $H=\mathbb{Q}$ وهو المطلوب. □

مبرهنة 1.1.2

ليكن K و L و E ثلاث حقول تبديلية بحيث: $K-L-E$. إذا كان $[L:K]=m$ و $[E:L]=n$ فإن:

$$[E:K]=[E:L]\times[L:K]=nm.$$

برهان. ليكن $B_1=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ أساسا لـ L على K و $B_2=\{f_1,f_2,\ldots,f_m\}$ أساسا لـ E على L وليكن x من E، لدينا إذن:

$$x=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j f_j,\quad \alpha_j\in L,\quad 1\le j\le m$$

ومن أجل كل j بحيث $1 \leq j \leq m$، لدينا:

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ji} e_i, \quad \beta_{ji} \in K, \quad 1 \leq i \leq n$$

ومنه يكون لدينا:

$$x = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{ji} e_i \right) f_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \beta_{ji} e_i f_j$$

وبما أن x كيفي من E ويكتب على الشكل أعلاه، فإنه ينتج أن:

$$E = < e_i f_j >_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} .$$

ليكن $(\beta_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ من K، بحيث:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \beta_{ji} e_i f_j = 0$$

عندئذ ينتج لديـــنا:

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{ji} e_i \right) f_j = 0$$

ولكون B_2 أساسا لـ E على L فـــإن:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{ji} e_i = 0$$

ولكون B_1 أساسا لـ L على K فـــإن:

$$\beta_{ji} = 0$$

أثبتنا إذن أن الجملة $B = \{e_i f_j, \quad 1 \leq 1 \leq n, \ 1 \leq j \leq m\}$ المتكونة من nm عنصرا هي حرة ومولدة فهي تشكل أساسا لـ E على K ومنه $\dim_K E = nm$ أي أن $[E : K] = nm$. □

يمكننا تعميم المبرهنة أعلاه على الشكـــل التـــالي:

مبرهنة 2.1.2

لتكن $(K_i)_{1 \leq i \leq n}$ عائلة حقول تبديلية بحيث:

$$K_1 - K_2 - K_3 - \ldots - K_{n-1} - K_n$$

إذا كانت درجة كل توسيع منتهية فـإن:

$$[K_n : K_1] = \prod_{i=1}^{n-1} [K_{i+1} : K_i].$$

لديـــنا النتيـــجة التـــالية:

نتيجة 1.1.2

إذا كان E توسيعا منتهيا لحقل تبديلي K درجته عدد أولي فإنه لا يوجد أي حقل يتوسطهما.

تعريف 4.1.2: (العنصر الجبري على حقل تبديلي)

ليكن K و E حقلين تبديليين بحيث: $K-E$ و $\theta \in E$. نقول إن θ عنصرا جبريا على K إذا وجد $f(x) \in K[x]$ بحيث: $\deg f(x) \geq 1$ و $f(\theta)=0$.

ملاحظة 1.1.2

إذا كان θ غير جبري على K. نقول عنه إنه عنصر متسامي.

أمثلة 4.1.2

❶ مهما يكن θ من حقل تبديلي K فإنه جبري على K إذ أنه يوجد $f \in K[x]$ بحيث: $f(x)=x-\theta$ و $f(\theta)=0$.

❷ العنصر $\theta = i \in \mathbb{C}$ حيث $i^2=-1$ جبري على $\mathbb{Q}$ إذ أنه يوجد $f(x)=x^2+1 \in K[x]$ بحيث: $\deg f(x) \geq 1$ و $f(\theta)=0$.

❸ العنصر $j=\exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)$ هو عنصر جبري على $\mathbb{Q}$ إذ أنه يوجد $f(x)=x^2+x+1$ بحيث: $\deg f(x) \geq 1$ و $f(\theta)=0$.

❹ العنصر $\theta=(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \in \mathbb{R}$ جبري على $\mathbb{Q}$ إذ أنه لدينا:

$$\theta = \sqrt{2}+\sqrt{3} \Longrightarrow \sqrt{3}=\theta-\sqrt{2}$$
$$\Longrightarrow 3=(\theta-\sqrt{2})^2$$
$$\Longrightarrow \theta^2-2\sqrt{2}\theta-1=0.$$

لكن $(x^2-2\sqrt{2}x-1) \notin \mathbb{Q}[x]$ ومنه نكمل فيكون لدينا:

$$\theta = \sqrt{2}+\sqrt{3} \Longrightarrow 2\sqrt{2}\theta=\theta^2-1$$
$$\Longrightarrow 8\theta^2=(\theta^2-1)^2$$
$$\Longrightarrow \theta^4-10\theta^2+1=0.$$

وبالتالي فإن $\theta=(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \in \mathbb{R}$ عنصر جبري على $\mathbb{Q}$ لأننا أثبتنا وجود $f(x)=x^4-10x^2+1 \in \mathbb{Q}[x]$ بحيث: $\deg f(x) \geq 1$ و $f(\theta)=0$.

❺ الأعداد $\exp(1)$ و π و $\ln 2$ هي أعداد متسامية فهي ليست جبرية على $\mathbb{Q}$.

❻ ثابت أولر المعرف بـ:

$$\gamma=\lim_n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

لحد الآن ليس معروفا ما إذا كان جبريا أو متساميا على $\mathbb{Q}$.

تعريف 5.1.2

ليكن E توسيعا لـ K. نقول إن E توسيعا جبريا لـ K إذا كان كل عنصر من E جبريا على K.

تعريف 6.1.2: (كثير الحدود الأصغري)

ليكن K حقلا تبديليا و $\theta \in E$ عنصرا جبريا على K. نسمي كثير الحدود الأصغري لـ θ على K كثير الحدود $p(x) \in K[x]$ الذي يحقق الشروط التـالية:

1. $\deg p(x) \geq 1$.
2. $p(x)$ واحدي .
3. $p(x)$ غير قابل للاختزال في $K[x]$.
4. $p(\theta) = 0$.

ونرمز له بأحد الترميزين التاليين: $p(x) = \min(\theta, K, x)$ أو $p(x) = irr(\theta, K, x)$.

ملاحظات 1.1.2

1. كثير الحدود الأصغري وحيد وهو ذو الأصغر درجة وينعدم عند θ .
2. إذا كان $f(x) \in K[x]$ حيث $f(\theta) = 0$ فإن $p(x)$ يقسم $f(x)$.

تعاريف 2.1.2

ليكن K حقلا تبديليا و $\theta \in E$ عنصرا جبريا على K و $p(x) = \min(\theta, K, x)$.

1. درجة كثير الحدود الأصغري $p(x)$ لـ θ تسمى درجة θ ونرمز لها بـ $d_K^0\theta$ ونكتب: $d_K^0\theta = \deg p(x)$.
2. جذور $p(x)$ بما فيهم θ في حقل L مغلق جبريا يحوي K تسمى مرافقات θ .

ننتقل الآن الى برهان وجود كثير الحدود الأصغري. من أجل ذلك نعتبر المجموعة التالية:

$$E = \left\{ n \in \mathbb{N}^*,\ \exists f(x) \in K[x] : f(x) \text{ واحدي و } f(\theta) = 0 \right\}$$

المجموعة E هي مجموعة درجات كثيرات الحدود الواحدية من $K[x]$ والتي تنعدم عند θ. المجموعة E غير خالية وذلك لأن θ عنصرا جبريا على K ولدينا: $E \subset \mathbb{N}^*$ وبما أن $\mathbb{N}^*$ مرتبة ترتيبا كليا فإن E تقبل عنصرا أصغريا وليكن m . نضع إذن: $m = \min E$ وهذا معناه أنه يوجد كثير حدود $p(x) \in K[x]$ ذو أصغر درجة وواحدي يحقق: $p(\theta) = 0$.

نريد الآن إثبات أن $p(x)$ غير قابل للاختزال على $K[x]$. من أجل ذلك نحتاج المبرهنة التـالية:

مبرهنة 3.1.2

إذا كان q يقسم p في $K[x]$ و $q(\theta) = 0$ فإن p و q متشاركان في $K[x]$.

برهان. لدينا q يقسم p في $K[x]$ معناه: يوجد c من $K[x]$ بحيث: $p(x)=c(x)q(x)$. إن كثير الحدود c لا يمكن بأي حال من الأحوال أن يكون ثابتا وذلك لأن:

$$(q(\theta)=0 \text{ و } q \text{ ثابت }) \Longrightarrow q=0$$

وهذا ماينتج عنه أن $p=0$ وهذا تناقض مع كون $\deg p(x)\geq 1$. ليكن α معامل وحيد الحد الأعلى درجة في q ، نضع: $q_0=\frac{1}{\alpha}q$ فيكون q_0 واحدي و $\deg q_0=\deg q\geq 1$ و $q_0(\theta)=0$. لدينا:

$$m\leq \deg q_0=\deg q\leq \deg p=m \quad \text{ومنه} \quad \deg q_0=\deg q=\deg p=m$$

وهذا ماينتج عنه أن c ثابتا غير معدوم أي أنه يوجد λ من $U(K[x])$ بحيث يكون لدينا: $p(x)=\lambda q(x)$ وهذا معناه أن p و q متشاركان في $K[x]$. □

لننتقل الآن إلى إثبات المبرهنة التالية:

مبرهنة 4.1.2

كثير الحدود p من المجموعة E ذو الأصغر درجة هو كثير حدود غير قابل للاختزال في $K[x]$.

برهان. نريد إثبات أن p غير قابل للإختزال في $K[x]$ أي نريد إثبات التالي:

$$p(x)=f(x)g(x)\Longrightarrow f(x)\in U(K[x]) \quad \text{أو} \quad g(x)\in U(K[x]).$$

نميز الحالتين التاليتين:

❶ حالة $f(\theta)=0$: في هذه الحالة وباستعمال المبرهنة السابقة فإن f و p متشاركان في $K[x]$ أي أن p غير قابل للاختزال في $K[x]$.

❷ حالة $f(\theta)\neq 0$: بما أن $f(\theta)\neq 0$ فإن $g(\theta)=0$ ومنه وباستعمال المبرهنة السابقة فإن p و g متشاركان في $K[x]$ أي أن p غير قابل للاختزال في $K[x]$. □

2.2 نظريات أساسية حول التوسيعات الجبرية

في هذا الجزء سنتطرق إلى بعض النظريات الأساسية في التوسيعات الجبرية.

نظرية 1.2.2

ليكن E توسيعا لـ K ولتكن $0\neq\theta\in E$، عندئذ لدينا:

❶ $K[\theta]$ حقلا $\Longleftrightarrow$ θ عنصرا جبريا على K ، حيث:

$$K[\theta]=\{f(\theta)/\ \ f\in K[x]\}$$

❷ $\left(\theta \text{ عنصرا جبريا على } K \text{ و } d_K^0\theta=m\right)\Longrightarrow [K[\theta]:K]=m$

برهان. ❶ (أ) نبين الاستلزام الأول: لنفرض أن $K[\theta]$ حقلا، بما أن $0 \neq \theta \in K[\theta]$ فإن $\theta^{-1} \in K[\theta]$ وبالتالي يوجد $f(x) \in K[x]$ بحيث: $f(\theta) = \theta^{-1}$ ومنه $\theta f(\theta) = 1$. إذن يوجد $f(x) \in K[x]$ معرف بـ: $g(x) = xf(x) - 1$ ويحقق $g(\theta) = 0$ وهذا يعني أن θ عنصر جبري على K .

(ب) نبين الاستلزام الثاني: نفرض أن θ عنصرا جبريا على K. نضع: $P(x) = \min(\theta, K, x)$ ولنعتبر التطبيق التـالي:

$$\Psi \ : \ K[x] \longrightarrow K[\theta]$$
$$f(x) \longmapsto \Psi(f(x)) = f(\theta)$$

من جهة، يمكن التأكد بسهولة من أن التطبيق Ψ تماثل حلقات ومن جهة اخرى، لديـنا:

$$\begin{aligned}\ker\Psi &= \{f(x) \in K[x] : \Psi(f(x)) = f(\theta) = 0\} \\ &= \{f(x) \in K[x] : p(x) \mid f(x)\} \\ &= \{f(x) \in K[x] : f(x) = q(x)p(x)\} \\ &= p(x)K[x]\end{aligned}$$

بما أن $p(x)$ غير قابل للاختزال في $K[x]$ فإن المثالي $< p(x) >_{K[x]}$ أولي ولكن $K[x]$ حلقة رئيسية وذلك لأن K حقلا ومنه فإن المثالي $< p(x) >_{K[x]}$ أعظميا و $\frac{K[x]}{< p(x) >_{K[x]}}$ حقلا. إذن وحسب النظرية الأولى للتشاكلات فـإن: $\frac{K[x]}{< p(x) >_{K[x]}} \cong K[\theta]$ وينتج عن ذلك أن $K[\theta]$ حقـلا. نكتـب إذن: $K[\theta] = K(\theta)$.

❷ نفرض أن θ جبريا على K و $d_K^0\theta = n$. ليكن $0 \neq y \in K[\theta]$ ، إذن يوجد $f(x) \in K[x]$ بحيث: $y = f(\theta)$. نميز الحالتين التاليتين:

الحالة 01: إذا كانت $\deg f < n$ فإن:

$$y = a_0 + a_1\theta + ... + a_{n-1}\theta^{n-1}, \quad a_i \in K.$$

الحالة 02: إذا كانت $\deg f \geq n$ فإننا نقوم بالقسمة الإقليدية لـ $f(x)$ على $p(x)$ حيث $p(x)$ هو كثير الحدود الأصغري لـ θ على K فيكون لدينا:

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x). \quad \text{حيث:} \quad q, r \in K[x] \quad \text{مع} \quad \deg r < n \quad \text{أو} \quad r = 0$$

بما أن $p(\theta) = 0$ فإن $y = f(\theta) = p(\theta)q(\theta) + r(\theta) = r(\theta)$ وبما أن $\deg r < m$ فإن y يكتب على الشكل:

$$y = b_0 + b_1\theta + ... + b_{n-1}\theta^{n-1}, \quad b_i \in K$$

وفي كلتا الحالتين السابقتين فإن y هو عبارة خطية للجملة $\{1, \theta, \theta^2, ..., \theta^{n-1}\}$ وبالتالي فهي تولـد $K[\theta]$. إذا كانت $a_0 + a_1\theta + ... + a_{n-1}\theta^{n-1} = 0$. عندئذ نضع: $H(x) = a_0 + a_1x + ... + a_{n-1}x^{n-1}$ من $K[x]$. لدينا: $H(\theta) = 0$ و $p(x)$ يقسم $H(x)$ ولكون $n = \deg p(x) > \deg H(x) = n - 1$ فإن $H \equiv 0$ ومنه فإنه يكون لدينا: $b_0 = b_1 = ... = b_{n-1} = 0$. إذن الجملة $\{1, \theta, \theta^2, ..., \theta^{n-1}\}$ تشكل أساسا لـ $K[\theta]$ ومنه فإن:

$n = d_K^0\theta = [K[\theta] : K]$ وهو المطلوب .

□

نظرية 2.2.2

ليكن E توسيعا منتهيا لـ K بحيث: $[E:K]=n$، عندئذ لدينا القضيتين التاليتين:

❶ E توسيعا جبريا لـ K.

❷ من أجل كل θ من E فإن $d_K^0\theta$ تقسم n.

برهان. ❶ يكفي أن نبرهن أن كل عنصر θ من E جبريا على K. ليكن إذن θ عنصرا من E ولنعتبر الجملة التالية: $\{1,\theta,\theta^2,...,\theta^n\}$ المحتواة في E . بما أن هذه الجملة مرتبطة خطيا لأن عدد عناصرها أكبر تماما من n فإنه توجد عناصر a_0 ، a_1 ،....، a_n من K ليست كلها معدومة معا بحيث: $a_0+a_1\theta+...+a_n\theta^n=0$ وبالتالي فإن θ جذرا لكثير الحدود $f\in K[x]$ المعرف بـ:

$$f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n.$$

بما أن العناصر a_0 ، a_1 ،....، a_n ليست كلها معدومة معا، فإنه يوجد على الأقل i_0 ، $0\le i_0\le n$ بحيث: $a_{i_0}\neq 0$ ونميز الحالتين التاليتين:

- إذا كان $i_0\neq 0$ أي $1\le i_0\le n$ فإنه من الواضح أن $\deg f\ge 1$.
- إذا كان $i_0=0$ فإن $a_{i_0}\neq 0$ ويوجد عندئذ j_0، $1\le j_0\le n$ بحيث: $a_{j_0}\neq 0$ وإلا لحصلنا على $a_0=0$ لأن $f(\theta)=0$ وهو ما يناقض كون $a_0\neq 0$ ومنه فـــإن: $\deg f\ge 1$.

من الحالتين السابقتين، نستنتج أنه يوجد على الأقل i_0، $1\le i_0\le n$ بحيث: $a_{i_0}\neq 0$ ومنه:

$$\exists f(x)\in K[x]:(\deg f\ge 1)\ \text{و}\ (f(\theta)=0).$$

وهذا يعني أن θ جبريا على K وهو المطلوب.

❷ ليكن θ عنصرا من E ولنعتبر التوسيعات التالية: $K-K(\theta)-E$. نضع: $[K(\theta):K]=r$ و $[E:K(\theta)]=$. حسب قانون الدرجات فإن $n=rs$ أي أن r يقسم n وبالتالي $d_K^0\theta$ يقسم n وهو المطلوب. □

تعريف 1.2.2

ليكن K حقلا و L حقلا مغلقا جبريا يحوي K و $\theta\in L$ جبريا على K. نقول إن θ فصـــولا على K إذا كان كثير حدوده الأصغري فصـــولا على K.

ملاحظة 1.2.2

إذا كان K حقل أعداد أي $\mathbb{Q}\subset K\subset\mathbb{C}$ فإن كل عنصر جبري على K يكون فصـــولا على K .

نظرية 3.2.2: (نظرية العنصر المولد في حقل كيفي)

ليكن K و L حقلين تبديليين بحيث الحقل L مغلق جبريا ويحوي K وليكن α و β عنصرين من L جبريين على K. إذا كان كلا من α و β فصولا على K فإنه يوجد δ من L بحيث: $K(\alpha,\beta)=K(\delta)$.

برهان. ننشئ العنصر δ من L باتباع المراحل التالية:

المرحلة الأولى: نضع:

$$\begin{cases} p(x)=\min(\alpha,K,x) \\ \deg p(x)=n\geq 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} q(x)=\min(\beta,K,x) \\ \deg q(x)=m\geq 1 \end{cases}$$

$\alpha_1=\alpha$ ، α_2 ،...، α_n هي جذور $p(x)$ في L و $\beta_1=\beta$ ، β_2 ،...، β_m هي جذور $q(x)$ في L. بما أن α و β فصولان على K فهذا يعني أن:

$$\forall (i,j):\ (i\neq j)\Longrightarrow(\alpha_i\neq\alpha_j)\quad \text{و}\quad (\beta_i\neq\beta_j)$$

المرحلة الثانية: نعتبر المجموعة التالية:

$$A=\left\{\frac{\alpha-\alpha_i}{\beta_j-\beta}/\ 1\leq i\leq \quad \text{و} \quad 2\leq j\leq m\right\}$$

لدينا المعلومتين التاليتين:

❶ أصلي المجموعة A يحقق: $Card(A)\leq n(m-1)$.

❷ المجموعة A غير خالية لأنه لدينا مثلا: $0\in A$.

المرحلة الثالثة: ليكن $c\in K-A$، نضع $\delta=\alpha+c\beta$. واضح أن $\delta\in K(\alpha,\beta)$ ومنه نحصل على الاحتواء التالي:

$$K(\delta)\subset K(\alpha,\beta) \qquad \text{(الاحتواء الأول)}$$

لنثبت الآن الاحتواء الثاني أي نثبت أن $K(\alpha,\beta)\subset K(\delta)$. من أجل ذلك نعتبر كثيري الحدود التاليين:

$$\begin{cases} h(x)=p(\delta-cx)\in K(\delta)[x]\subset L[x] \\ q(x)\in K[x]\subset L[x] \end{cases}$$

لدينا: $q(\beta)=0$ و $h(\beta)=p(\alpha)=0$ ومنه فإن β جذرا مشتركا بين $h(x)$ و $q(x)$ و لنبين أنه من أجل كل $j\in[[2,m]]$ فإن $h(\beta_j)\neq 0$. نفرض بالخلف وجود $j\in[[2,m]]$ بحيث: $h(\beta_j)=0$، فيكون لدينا:

$$\begin{aligned} h(\beta_j)=0 &\Longleftrightarrow p(\delta-c\beta_j)=0 \\ &\Longleftrightarrow p(\alpha+c\beta-c\beta_j)=0 \\ &\Longleftrightarrow \exists i\in[[1,n]]: c(\beta_j-\beta)=\alpha-\alpha_i \\ &\Longleftrightarrow \exists i\in[[1,n]]: c=\tfrac{\alpha-\alpha_i}{\beta_j-\beta}\in A \end{aligned}$$

وهذا تناقض مع كون $c\notin A$. إذن من أجل كل $j\in[[2,m]]$ يكون لدينا: $h(\beta_j)\neq 0$ وبالتالي فإن $(x-\beta)$ هو القاسم المشترك الأكبر لـ h و q في $L[x]$ أي أن $D(x)=p\gcd_{L[x]}(h(x),q(x))=x-\beta$ فإذا

كان $d(x)=p\gcd_{K[x]}(h(x),q(x))$ فإنه حسب جواب السؤال الثالث من التمرين 1 من التمارين المقترحة للفصل الأول يكون لدينا التالي:

$$\exists\lambda\in K:\ \lambda D(x)=d(x)\in K(\delta)[x]\Longrightarrow\lambda(x-\beta)=d(x)\in K(\delta)[x]$$
$$\Longrightarrow\lambda\in K(\delta)\ \text{ و }\ \lambda\beta\in K(\delta)$$
$$\Longrightarrow\lambda\in K(\delta)\ \text{ و }\ \beta\in K(\delta)$$

ومنه نحصل على الاحتواء الثـاني:

$$K(\alpha,\beta)\subset K(\delta)\qquad\text{(الإحتواء الثاني)}$$

من الاحتوائين الأول والثاني ينتج لدينا إذن وجود $\delta=\alpha+c\beta$ مع $c\in K-A$ بحيث: $K(\alpha,\beta)=K(\delta)$ وهو المطلوب إثبـاته. □

نظرية 4.2.2: (نظرية العنصر المولد في حقل أعداد)

ليكن K حقل أعداد أي $\mathbb{Q}\subset K\subset\mathbb{C}$ و α و β عنصرين من $\mathbb{C}$ وجبريين على K، عندئذ يوجـد δ من $\mathbb{C}$ بحيـث:

$$K(\alpha,\beta)=K(\delta).$$

مثال 1.2.2

لنعين عنصرا مولدا للحقل $\mathbb{Q}(i,\sqrt[3]{2})$، من أجل ذلك نضع: $\alpha=i$ و $\beta=\sqrt[3]{2}$. لديـنا:

$$\begin{cases}p(x)=\min(\alpha,\mathbb{Q},x)=x^2+1\\ \deg p(x)=2=n\geq 1\end{cases}\quad\text{و}\quad\begin{cases}q(x)=\min(\beta,\mathbb{Q},x)=x^3-2\\ \deg q(x)=3=m\geq 1\end{cases}$$

الأعداد: $\alpha_1=i$ و $\alpha_2=-i$ هي جذور p في $\mathbb{C}$ والأعداد $\sqrt[3]{2}$، $j\sqrt[3]{2}$ و $j^2\sqrt[3]{2}$ هي جذور q في $\mathbb{C}$ ومنه فكل من α و β فصولا على $\mathbb{Q}$. نجد إذن:

$$A=\left\{\frac{\alpha-\alpha_i}{\beta_j-\beta}/\ \ 1\leq i\leq 2\ \text{ و }\ 2\leq j\leq 3\right\}$$
$$=\left\{0,\frac{2i}{(j-1)\sqrt[3]{2}},\frac{2i}{(j^2-1)\sqrt[3]{2}}\right\}$$

نعلم أن: $\delta=\alpha+c\beta$ مع $c\in\mathbb{Q}-A$ أي أن $c\in\mathbb{Q}^*$ ومنه بأخذ مثلا $c=1$ نجد: $\mathbb{Q}(i,\sqrt[3]{2})=\mathbb{Q}(i+\sqrt[3]{2})$ وهو المطلوب.

نظرية 5.2.2: (تعميم نظرية العنصر المولد في حقل كيفي)

إذا كان K حقلا و L حقلا مغلقا جبريا يحوي K وكانت α_1 ، α_2 ،....، α_n، عناصر من L جبرية وفصولة على K فإنه يـوجد δ من L بحيـث:

$$K(\delta)=K(\alpha_1\alpha_2,...,\alpha_n).$$

3.2 تماثلات الحقول

في هذا الجزء سنتطرق إلى بعض المفاهيم الأساسية من أجل التعرف على كل من مفهومي التوسيع الجالوازي والزمرة الجالوازية .

تعريف 1.3.2

ليكن E و F حقلين تبديليين ولنعتبر التطبيق: $\sigma : E \longrightarrow F$. نقول إن σ تماثل حلقات إذا وفقط إذا تحقق من أجل كل x و y من E مـايـلي:

$$\sigma(xy)=\sigma(x)\sigma(y) \quad \text{و} \quad \sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y)$$

مبرهنة 1.3.2: (خواص أساسية)

ليكن E و F حقلين و $\sigma \in hom(E:F)$ بحيث: $\sigma \neq 0_F$ أي:

$$\sigma \neq 0_F \Longleftrightarrow \exists x \in E : \sigma(x) \neq 0_F$$

لديـــنا الخواص التـالية:

1. $\sigma(0_E)=0_F$ و $\sigma(1_E)=1_F$.
2. من أجل كل x و y من E، لدينا: $\sigma(x-y)=\sigma(x)-\sigma(y)$.
3. من أجل كل x من E، لدينا: $x \in U(E)$ يستلزم $\sigma(x) \in U(F)$.
4. $\ker\sigma=\{0_E\}$ أي أن σ متباين .
5. من أجل كل x من $U(E)$، لدينا: $\sigma\left(x^{-1}\right)=(\sigma(x))^{-1}$.
6. إذا كان H حقلا جزئيا من E فإن $\sigma(H)$ حقلا جزئيا من F .
7. إذا كان H' حقلا جزئيا من F فإن $\sigma^{-1}(H')$ حقلا جزئيا من E .

نظرية 1.3.2

ليكن K حقلا جزئيا من $\mathbb{C}$ بحيـث: $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{C}$ و $\sigma \in hom(K:\mathbb{C})$. لديـــنا:

$$\forall r \in \mathbb{Q} : \sigma(r)=r.$$

برهان. ليكن $r\in\mathbb{Q}$ أي $r=\frac{p}{q}$ مع $p\in\mathbb{Z}$ و $q\in\mathbb{Z}^*$. لدينا: $q\in\mathbb{Z}^*\subset\mathbb{Q}\subset K$ ومنه وحسب الخاصية 6 من النظرية السابقة فإن $\sigma\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{\sigma(q)}$ وبالتالي يكون لدينا:

$$\sigma\left(\frac{p}{q}\right)=\sigma(p)\sigma\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{\sigma(p)}{\sigma(q)}.$$

نعلم أنه من أجل كل p من $\mathbb{Z}$ فإن:

$$p=\begin{cases}\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\text{p مرة}} & \text{إذا كان } p>0\\ 0 & \text{إذا كان } p=0\\ \underbrace{(-1)+(-1)+\ldots+(-1)}_{\text{(-p) مرة}} & \text{إذا كان } p<0\end{cases}$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned}\sigma(p)&=\begin{cases}\underbrace{\sigma(1)+\sigma(1)+\ldots+\sigma(1)}_{\text{p مرة}} & \text{إذا كان } p>0\\ \sigma(0) & \text{إذا كان } p=0\\ \underbrace{\sigma(-1)+\sigma(-1)+\ldots+\sigma(-1)}_{\text{(-p) مرة}} & \text{إذا كان } p<0\end{cases}\\ &=\begin{cases}\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\text{p مرة}} & \text{إذا كان } p>0\\ 0 & \text{إذا كان } p=0\\ \underbrace{(-1)+(-1)+\ldots+(-1)}_{\text{(-p) مرة}} & \text{إذا كان } p<0\end{cases}\\ &=p\end{aligned}$$

ومنه نحصل على ما يلي:

$$\forall r\in\mathbb{Q},\exists(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*:\left(r=\frac{p}{q}\right)\wedge\left(\sigma(r)=\sigma\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{\sigma(p)}{\sigma(q)}=\frac{p}{q}=r\right)$$

□

تمرين تطبيقي: عين $Hom(K:\mathbb{C})$ من أجل $K=\mathbb{Q}$، $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ وأخيرا من أجل $K=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

4.2 التوسيع الجالوازي والزمرة الجالوازية

ليكن K حقلا تبديليا و E توسيع لـ K و وليكن L حقلا مغلقا جبريا يحوي K بحيث: $K\subset E\subset L$.

تعريف 1.4.2

ليكن α عنصرا من E وجبريا على K. نقول عن α إنه فصول على K إذا كان كثير الحدود الأصغري $\min(\alpha,K,x)$ لـ α على K فصولا على K أي إذا كانت كل جذور $\min(\alpha,K,x)$ في L بسيطة.

تعريف 2.4.2: (التوسيع الجالوازي)

ليكن K حقلا تبديليا و E توسيعا جبريا لـ K .

❶ التوسيع الفصول: نقول إن E توسيعا فصولا على K إذا كان كل عنصر من E فصولا على K.

❷ التوسيع الاعتيادي: نقول إن E توسيعا اعتياديا على K إذا تحققت إحدى القضيتين التاليتين:

(أ) كل عنصر α من E مرافقاته في E .

(ب) يوجد $f(x)\in K[x]$ مع $\deg f=n\geq 1$ بحيث E هو حقل جذور f على K .

❸ التوسيع الجالوازي: نقول إن E توسيعا جالوازيا على K إذا كان E فصولا واعتياديا على K.

ننتقل الآن إلى تعريف الزمرة الجالوازية .

تعريف 3.4.2: (الزمرة الجالوازية)

ليكن E توسيعا جالوازيا على K . زمرة جالوا للتوسيع الجالوازي E على K والتي نرمز لها بـ $G(E/K)$ هي الزمرة التي عناصرها هي كل التشاكلات الذاتية لـ E مزودة بقانون تركيب التطبيقات $\circ$ والتي تبقي K صامدة. أي هي الزمرة التي عناصرها هي كل التشاكلات الذاتية $\sigma : E \longrightarrow E$، بحيث من أجل كل z من K فإن: $\sigma(z)=z$.

لدينا النتيجة التالية:

نتيجة 1.4.2

رتبة زمرة توسيع جالوا لـ E على K تساوي درجة التوسيع الجالوازي لـ E على K ونكتب:

$$o(G(E/K))=[E:K].$$

أمثلة 1.4.2

❶ من أجل $E=\mathbb{Q}(i)$ و $K=\mathbb{Q}$، لدينا: $p(x)=\min(i,\mathbb{Q},x)=x^2+1$ و $\mathbb{Q}(i)$ توسيع اعتيادي على $\mathbb{Q}$ لأن $\pm i\in\mathbb{Q}(i)$ كذلك بما أن $\mathbb{Q}$ حقل أعداد (مميزته معدومة) و p غير قابل للاختزال في $\mathbb{Q}[x]$ فإن $\mathbb{Q}(i)$ فصولا على $\mathbb{Q}$ ومنه $\mathbb{Q}(i)$ توسيع جالوازي على $\mathbb{Q}$.

❷ من أجل $E=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ و $K=\mathbb{Q}$، لدينا: $q(x)=\min(\sqrt[3]{2},\mathbb{Q},x)=x^3-2$. لأن الجذور الثلاثة لـ q والتي هي $\sqrt[3]{2}$ و $j\sqrt[3]{2}$ و $j^2\sqrt[3]{2}$ بسيطة فإن $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ توسيع فصول على $\mathbb{Q}$ ولكن $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ليس توسيعا

اعتياديا على $\mathbb{Q}$ وذلك لأنه على سبيل المثال $j\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ وبالتالي فإن $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ليس توسيعا جالوزيا على $\mathbb{Q}$.

تمـرين تطبيـقي: لنعين الزمرة الجالوازية $G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$، أي لنعين مجموعة كل التشاكلات الذاتية σ لـ $\mathbb{C}$ والتي تبقي $\mathbb{R}$ صامدة . ليكن σ تشاكلا ذاتيا لـ $\mathbb{C}$، لدينا:

$$\begin{aligned} \sigma : \quad & \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & z = a + ib \longmapsto \sigma(a+ib) \,/\, \forall z \in \mathbb{R} : \sigma(z) = z \end{aligned}$$

لأن σ تماثل حلقات من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ فإن $\sigma(a+ib) = \sigma(a) + \sigma(i)\sigma(b)$ وبما أن a و b من $\mathbb{R}$ فإن $\sigma(a) = a$ و $\sigma(b) = b$ ومنه $\sigma(a+ib) = a + \sigma(i)\,b$. بقي إيجاد القيم الممكنة في $\mathbb{C}$ لـ $\sigma(i)$ ، من أجل ذلك لدينا:

$$\begin{aligned} i^2 = -1 &\Longrightarrow \sigma\left(i^2\right) = \sigma(-1) \\ &\Longrightarrow [\sigma(i)]^2 = -1 \\ &\Longrightarrow \sigma(i) = \pm i \end{aligned}$$

ومنه نحصل على التشاكلين الذاتيين التاليين لـ $\mathbb{C}$:

$$\sigma_0 : \begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z = a+ib &\longmapsto z = a+ib \end{aligned} \quad \text{و} \quad \sigma_1 : \begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z = a+ib &\longmapsto \overline{z} = a-ib \end{aligned}$$

ويكـــون لديـــنا:

$$G(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{\sigma_0, \sigma_1\} \quad \text{و} \quad o(G(\mathbb{C}/\mathbb{R})) = [\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$$

تعريف 4.4.2: (الحقول الجزئية الوسطية الصامدة)

ليكن E توسيعا جالوازيا على K ولتكن H زمرة جزئية من الزمرة الجالوازية $G(E/K)$. المجموعة E^H المعرفة بـ:

$$E^H = \{z \in E : \sigma(z) = z \quad \forall \sigma \in H\}$$

تسمى الحقل الوســطي الصـامد بالزمـرة الجزئية H .

5.2 تمارين مقترحة حول الفصل الثاني

التمرين 01:

نعتبر الأعـــداد: $\alpha=\sqrt{2+\sqrt{2}}$، $\beta=\sqrt[3]{2}$ و $\gamma=\exp\left(i\frac{2\pi}{5}\right)$.

❶ تأكـد أن كلا من α، β و γ جبريا على $\mathbb{Q}$ ثم عين كثير حدوده الأصغري ومرافقـاته.

❷ عين مقلـوب كلا من α، β و γ في $\mathbb{Q}(\alpha)$، $\mathbb{Q}(\beta)$ و $\mathbb{Q}(\gamma)$ على التـرتيب.

التمرين 02:

نعتبر الأعـداد: $\alpha=i$، $\beta=\sqrt[3]{2}$ و $\delta=i+\sqrt[3]{2}$.

❶ بين أن α جبري على $\mathbb{Q}$ درجته 2 و β جبري على $\mathbb{Q}$ درجته 3.

❷ بين أن $\mathbb{Q}(\delta)=\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ ثم عين كثير الحدود الأصغري لـ δ وعين مرافقـاته .

التمرين 03:

ليكن K حقلا جزئيا من $\mathbb{C}$ و $\alpha\in\mathbb{C}$.

❶ برهن أن α جبريـا على K إذا وفقط إذا كان $\sqrt{\alpha}$ جبريـا على K .

❷ برهن أنه إذا كانت درجة α عددا فرديا فـإن $K(\alpha)=K(\alpha^2)$.

التمرين 04:

ليكن a و b عددان ناطقـان حيث $b\neq 0$.

❶ بين أن $\mathbb{Q}(\sqrt{a})=\mathbb{Q}(\sqrt{b})$ إذا وفقط إذا كان $\frac{a}{b}$ مربعـا تـامـا لعدد نـاطــق.

التمرين 05:

❶ ليكن K و E حقلين جزئيين من $\mathbb{C}$ و $\sigma\in\hom(K,E)$ بحيث: $\sigma\neq 0$.

بـرهن أن: $\sigma\in\hom_{\mathbb{Q}}(K,E)$ أي أن $\sigma(r)=r$ وذلك من أجـل كل r مـن $\mathbb{Q}$.

❷ عين المجموعتين التاليتيـن: $\hom(\mathbb{Q},\mathbb{C})$ و $\hom(\mathbb{Q})$.

❸ ليكن $\sigma\in\hom(\mathbb{R},\mathbb{C})$. برهن أن $\sigma=id_{\mathbb{R}}$ إذا وفقط إذا كان $\sigma(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$.

❹ عين المجموعـات التـالية:

$\hom_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}),\mathbb{Q}(\sqrt{3}))$ ، $\hom_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}),\mathbb{Q}(\sqrt{3}))$ و $\hom_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}),\mathbb{C})$.

التمرين 06:

نعتبر كثيـر الحـدود $p(x)=x^3-3x+1\in\mathbb{Q}[x]$ غير القابـل للاختـــزال في $\mathbb{Q}[x]$.

❶ ليكن θ أحد جذور $p(x)$. بين أن θ^2-2 جذرا لـ $p(x)$ واستنتج قيمة الجذر الثالث لـ $p(x)$ بدلالـة θ .

❷ ليكن E حقل جذور $p(x)$ في $\mathbb{C}$. عيـن $[E:\mathbb{Q}]$ درجة E على $\mathbb{Q}$ وجد أسـاسا لـه .

❸ عيـن $G=\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ زمرة جالوا للتوسيـع E على $\mathbb{Q}$.

❹ عيـن z مقلـوب $1+\theta+\theta^2$ في E ثم عين $\sigma(z)$ من أجل كل عنـصر z من G .

❺ أحســب العدديـــن: $\sum_{\sigma\in G}\sigma(\theta)$ و $\sum_{\sigma\in G}\sigma(\theta)$.

التمرين 07:

نعتبر الحقـــل $E=\mathbb{Q}(i,\sqrt{3})$ الناتج من إضافة العنصريـن i و $\sqrt{3}$.

❶ بين أن E توسيع جالوا للحقـل $\mathbb{Q}$.

❷ عين عنصرا مـــولدا θ للحقل E ثم عين أساسين مختلفين للحقـل E على $\mathbb{Q}$.

❸ عين $G=\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$. أنشئ جدولها وعين مجموعة زمرها الجزئية .

❹ عين مجموعة الحقول الجزئية الوسيطية للحقل E .

التمرين 08:

ليكن $\alpha = \sqrt{5+4i\sqrt{3}}$ مع $(i^2=-1)$.

❶ عين $p(x)=\min(\alpha,\mathbb{Q},x)$ واحسب كل جذوره وبرهن أن $\sqrt{73}\notin\mathbb{Q}(\alpha)$.

❷ بين أن حقل جذور $p(x)$ في $\mathbb{C}$ على $\mathbb{Q}$ هو $E=\mathbb{Q}(\alpha,\sqrt{73})$ وأن $[E:\mathbb{Q}]=8$.

❸ برهن أن $B=\{1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\sqrt{73},\sqrt{73}\alpha,\sqrt{73}\alpha^2,\sqrt{73}\alpha^3\}$ تشكل أساسا لـ E على $\mathbb{Q}$.

❹ أكتب في الأساس B جذور $p(x)$ و α^m من أجل $m\in\{4,5,6,7,8,9\}$.

❺ عين $G=\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ وزمرها الجزئية والحقول الجزئية الوسطية للحقل E .

6.2 حلول بعض تمارين الفصل الثاني

التمرين 01:

❶ التأكد من أن α جبريا على $\mathbb{Q}$ ثم تعيين كثير حدوده الأصغري ومرافقاته. لدينا:

$$\begin{aligned}\alpha=\sqrt{2+\sqrt{2}} &\Longrightarrow \alpha^2=2+\sqrt{2}\\ &\Longrightarrow \alpha^2-2=\sqrt{2}\\ &\Longrightarrow (\alpha^2-2)^2=2\\ &\Longrightarrow \alpha^4-4\alpha^2+2=0\end{aligned}$$

إذن يوجد $f(x)=x^4-4x^2+2\in\mathbb{Q}[x]$ يحقق $\deg f(x)=4\geq 1$ و $f(\alpha)=0$ ومنه α جبري على $\mathbb{Q}$.
هل كثير الحدود $f(x)$ أصغري لـ α في $\mathbb{Q}[x]$؟ كثير الحدود f واحدي وغير قابل للاختزال في $\mathbb{Q}[x]$ وذلك بأخذ $p=2$ وتطبيق معيار ايزنستاين وبالتالي فإن f غير قابل للاختزال على $\mathbb{Q}[x]$ ومنه فـــإن:

$$\min(\alpha,\mathbb{Q},x)=f(x)=x^4-4x^2+2.$$

مرافقات α هي كل الجذور في $\mathbb{C}$ لكثير الحدود $f(x)$ بما فيها α . نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $f(x)=0$ فنجد أن مرافقـات هـي:

$$x_4=-\sqrt{2-\sqrt{2}} \text{ و } x_3=\sqrt{2-\sqrt{2}}\text{ ،}x_2=-\sqrt{2+\sqrt{2}}\text{ ،}x_1=\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

❷ التأكد من أن β جبريا على $\mathbb{Q}$ ثم تعيين كثير حدوده الأصغري ومرافقاته. لدينا:

$$\begin{aligned}\beta=\sqrt[3]{2} &\Longrightarrow \beta^3=2\\ &\Longrightarrow \beta^3-2=0\end{aligned}$$

إذن يوجـد $g(x)=x^3-2\in\mathbb{Q}[x]$ يحقـق $\deg g(x)=3\geq 1$ و $g(\beta)=0$ ومنـه β جبـــري على $\mathbb{Q}$.
كثير الحدود $g(x)$ درجته أقل أو يساوي 3 ولا يقبل أي جذر في $\mathbb{Q}$ وبالتـالي فهو غيـر قابـل للاختـزال على $\mathbb{Q}$. إذن كثير الحدود الأصغـري لـ β هـو $\min(\beta,\mathbb{Q},x)=g(x)=x^3-2$.
مرافقـات β هي حلول المعادلة $g(x)=0$ في $\mathbb{C}$ فنجد أن مرافقـات β هـي:

$$x_3=\sqrt[3]{2}\exp\left(\frac{4\pi}{3}i\right) \text{ و } x_2=\sqrt[3]{2}\exp\left(\frac{2\pi}{3}i\right)\text{ ،}x_1=\sqrt[3]{2}$$

❸ التأكد من أن γ جبريـا على $\mathbb{Q}$ ثم تعيين كثير حدوده الأصغـري ومرافقـاته. لديـنا:

$$\begin{aligned}\gamma=\exp\left(\frac{2\pi}{5}i\right) &\Longrightarrow \gamma^5=1\\ &\Longrightarrow \gamma^5-1=0\end{aligned}$$

إذن يوجـد $h(x)=x^5-1\in\mathbb{Q}[x]$ يحقـق $\deg h(x)=5\geq 1$ و $h(\gamma)=0$ ومنـه γ جبـري على $\mathbb{Q}$.
❹ تعيين كثير الحدود الأصغري لـ γ. $h(x)$ قابـل للاختزال في $\mathbb{Q}[x]$ لأنه يقبل 1 جـذر لـه في $\mathbb{Q}$ ومنه فـــإن:

$$h(x)=x^5-1=(x-1)(x^4+x^2+x+1)$$

لدينا: $p(x)=x^4+x^2+x+1$ غير قابل للاختزال في $\mathbb{Q}[x]$ لأنه مكتوب من الشكل:

$$p(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1 \quad \text{مع} \quad p=5$$

إذن كثير الحدود الأصغري لـ γ هو $\min(\gamma,\mathbb{Q},x)=p(x)=x^4+x^2+x+1$.
مرافقات γ هي حلول المعادلة $p(x)=0$ في $\mathbb{C}$ فنجد أن مرافقات γ هي:

$$x_1=\exp\left(\frac{2\pi}{5}i\right)،\ x_2=\exp\left(\frac{4\pi}{5}i\right)،\ x_3=\exp\left(\frac{6\pi}{5}i\right) \ \text{و} \ x_4=\exp\left(\frac{8\pi}{5}i\right)$$

❺ تعيين مقلوب كلا من α، β و γ في $\mathbb{Q}(\alpha)$، $\mathbb{Q}(\beta)$ و $\mathbb{Q}(\gamma)$ على الترتيب.
الطريقة الأولى: لدينا

$$\begin{aligned} f(\alpha)=0 &\iff \alpha^4-4\alpha^2+2=0 \\ &\iff \alpha\left(2\alpha-\tfrac{1}{2}\alpha^3\right)=1 \\ &\iff \alpha^{-1}=2\alpha-\tfrac{1}{2}\alpha^3\in\mathbb{Q}(\alpha) \end{aligned}$$

إذن مقلوب α في $\mathbb{Q}(\alpha)$ هو العدد $\alpha^{-1}=2\alpha-\frac{1}{2}\alpha^3$.
الطريقة الثانية : بما أن $\{1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3\}$ تشكل أساسا لـ $\mathbb{Q}(\alpha)$ فإنه:

$$\exists!\,(a,b,c,d)\in\mathbb{Q}^4 : \alpha^{-1}=a+b\alpha+c\alpha^2+d\alpha^3$$

ولنعين كلا من a، b، c و d. لدينا:

$$\alpha\alpha^{-1}=1=a\alpha+b\alpha^2+c\alpha^3+d\alpha^4$$

وبما أن $\alpha^4=4\alpha^2-2$ فإنه بالتعويض في العلاقة أعلاه نجد

$$-2d-1+a\alpha+(b+4d)\alpha^2+c\alpha^3=0$$

بما أن $\{1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3\}$ تشكل أساسا لـ $\mathbb{Q}(\alpha)$ فإن $a=0$، $b=2$، $c=0$ و $d=-\frac{1}{2}$ ومنه مقلوب α في $\mathbb{Q}(\alpha)$ هو $\alpha^{-1}=2\alpha-\frac{1}{2}\alpha^3$.
بنفس الطريقة نجد أن مقلوب كلا من β و γ في $\mathbb{Q}(\beta)$ و $\mathbb{Q}(\gamma)$ على الترتيب هما:

$$\beta^{-1}=\frac{1}{2}\beta^2\in\mathbb{Q}(\beta) \ \text{و} \ \gamma^{-1}=-\gamma^3-\gamma^2-\gamma-1\in\mathbb{Q}(\gamma)$$

التمرين 02:

❶ لنتأكد من أن α جبري على $\mathbb{Q}$ درجته 2 و β جبري على $\mathbb{Q}$ درجته 3. واضح أن العدد α جبري على $\mathbb{Q}$ لأنه يوجد $f(x)=x^2+1\in\mathbb{Q}[x]$ بحيث: $\deg f(x)\geq 1$ و $f(\alpha)=0$. بما أن $f(x)$ غير قابل للاختزال على $\mathbb{Q}[x]$ فإن درجة α هي درجة $f(x)$ وتساوي 2 ونكتب: $d_{\mathbb{Q}}\alpha=[\mathbb{Q}(\alpha),\mathbb{Q}]=2$. برهنا كذلك في التمرين الأول أن β جبري على $\mathbb{Q}$ ودرجة كثير الحدود الأصغري له هي 3 ومنه فإن درجة β هي 3 ونكتب:

$$d_{\mathbb{Q}}\beta=[\mathbb{Q}(\beta),\mathbb{Q}]=3.$$

❷ إثبات أن $\mathbb{Q}(\delta)=\mathbb{Q}(i,\sqrt[3]{2})$. نبين الاحتوائين التاليين: $\mathbb{Q}(\delta)\subset\mathbb{Q}(i,\sqrt[3]{2})$ و $\mathbb{Q}(i,\sqrt[3]{2})\subset\mathbb{Q}(\delta)$.
لدينا: $i\in\mathbb{Q}(i,\sqrt[3]{2})$ و $\sqrt[3]{2}\in\mathbb{Q}(i,\sqrt[3]{2})$ إذن $\delta=i+\sqrt[3]{2}\in\mathbb{Q}(i,\sqrt[3]{2})$ ومنه فإن:

$$\mathbb{Q}(\delta)\subset\mathbb{Q}(i,\sqrt[3]{2}) \qquad (1.2)$$

لنبين أن $i \in \mathbb{Q}(\delta)$. لدينا:

$$\delta = i + \sqrt[3]{2} \Longrightarrow (\delta - i)^3 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3$$
$$\Longrightarrow i = \left(\delta^3 - 3\delta - 2\right)\left(3\delta^2 - 1\right)^{-1}$$

وبما أن $\left(\delta^3 - 3\delta - 2\right) \in \mathbb{Q}(\delta)$ و $\left(3\delta^2 - 1\right)^{-1} \in \mathbb{Q}(\delta)$ و $i \in \mathbb{Q}(\delta)$ فإن $\sqrt[3]{2} = \delta - i \in \mathbb{Q}(\delta)$ ومنه

$$\mathbb{Q}\left(i, \sqrt[3]{2}\right) \subset \mathbb{Q}(\delta) \qquad (2.2)$$

من (1.2) و (2.2) نحصل على $\mathbb{Q}(\delta) = \mathbb{Q}\left(i, \sqrt[3]{2}\right)$ مع $\delta = i + \sqrt[3]{2}$ وهو المطلـــوب.

❸ استنتـاج كثير الحـدود الأصغري لـ δ. لدينـا:

$$\delta = i + \sqrt[3]{2} \Longrightarrow (\delta - i)^3 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3$$
$$\Longrightarrow \delta^3 - 3\delta^2 i - 3\delta + i = 2$$
$$\Longrightarrow \left(\delta^3 - 3\delta - 2\right)^2 = (i)^2\left(3\delta^2 - 1\right)^2$$
$$\Longrightarrow \delta^6 + 3\delta^4 - 4\delta^3 + 3\delta^2 + 12\delta + 5 = 0$$

إذن يوجـد $f(x) = x^6 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 12x + 5 \in \mathbb{Q}[x]$ يحقق $\deg f(x) = 6 \geq 1$ و $f(\delta) = 0$.

لإثبات أن $f(x)$ غير قابل للاختزال على $\mathbb{Q}[x]$ يكفي إثبـات أن $[\mathbb{Q}(\delta) : \mathbb{Q}] = 6$. حسب قانون الدرجات لدينـا:

$$\mathbb{Q} \underset{p(x)=x^3-2}{\overset{3}{---}} \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right) \underset{q(x)=x^2+1}{\overset{2}{---}} \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}, i\right) = \mathbb{Q}(\delta)$$
$$[\mathbb{Q}(\delta) : \mathbb{Q}] = \left[\mathbb{Q}(\delta) : \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)\right] \times \left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right) : \mathbb{Q}\right] = 2 \times 3 = 6$$

بما أن $f(x)$ واحدي و $\deg f(x) = 6 \geq 1$ و $f(\delta) = 0$ و $[\mathbb{Q}(\delta) : \mathbb{Q}] = 6$ فـإن

$$\min(\delta, \mathbb{Q}, x) = f(x) = x^6 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 12x + 5$$

❹ تعيين مرافقـات δ. مرافقـات δ هي حلول المعادلة $f(x) = 0$ في $\mathbb{C}$. نجد أن مرافقـات δ هـي:

$$\delta_1 = i + \sqrt[3]{2}\,،\ \delta_2 = i + \sqrt[3]{2}\exp\left(\tfrac{2\pi}{3}i\right)\,،\ \delta_3 = i + \sqrt[3]{2}\exp\left(\tfrac{4\pi}{3}i\right)\,،$$
$$\delta_4 = -i + \sqrt[3]{2}\,،\ \delta_5 = -i + \sqrt[3]{2}\exp\left(\tfrac{2\pi}{3}i\right)\,،\ \delta_6 = -i + \sqrt[3]{2}\exp\left(\tfrac{4\pi}{3}i\right).$$

التمرين 03:

❶ إثبـات أن α جبري على K إذا وفقط إذا كـان $\sqrt{\alpha}$ جبريـا على K.

الاستلزام الأول: نفرض أن α جبري على K ونبين أن $\sqrt{\alpha}$ جبري على K. لدينـا: α جبري على K معنـاه

$$\exists f(x) \in K[x] : \deg f(x) \geq 1 \ \wedge \ f(\alpha) = 0$$

نعـرف $g(x)$ من الشكـل: $g(x) = f\left(x^2\right)$. لدينـا:

$$g(x) \in K[x]\,،\ \deg g(x) = 2\deg f(x) \geq 1 \text{ و } g\left(\sqrt{\alpha}\right) = f(\alpha) = 0$$

ومنـــه $\sqrt{\alpha}$ جبـــري على K.

الاستلزام الثاني: نفرض أن $\sqrt{\alpha}$ جبري على K ونبين أن α جبري على K. لدينـا: $\sqrt{\alpha}$ جبري على معناه يوجد $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in K[x]$ يحقـق $\deg f(x) \geq 1$ و $f(\alpha) = 0$. نكتـــب:

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k = \sum_{k\geq 0} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k\geq 0} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

ومنه

$$f(\alpha)=0 \Longleftrightarrow \sum_{k\geq 0} a_{2k}\alpha^k + \sum_{k\geq 0} a_{2k+1}\alpha^k\sqrt{\alpha}=0$$

أي أن

$$\left(\sum_{k\geq 0} a_{2k}\alpha^k\right)^2 = \alpha\left(\sum_{k\geq 0} a_{2k+1}\alpha^k\right)^2$$

بوضع: $g(x)=\left(\sum_{k\geq 0} a_{2k}x^k\right)^2 - x\left(\sum_{k\geq 0} a_{2k+1}x^k\right)^2$ فإن كثير الحدود $g(x)$ يحقق:

$$g(x)\in K[x]\text{، } g(\alpha)=0 \text{ و } \deg f(x)\geq 1$$

ومنه فإن α جبري على K.

❷ إثبات أنه إذا كان: $[K(\alpha):K]=2k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$ فإن $K(\alpha)=K(\alpha^2)$. نبين الاحتوائين التاليين: $K(\alpha^2)\subset K(\alpha)$ و $K(\alpha)\subset K(\alpha^2)$. لدينا: $\alpha\in K(\alpha)$ وبما أن $K(\alpha)$ حقل فإن $\alpha^2\in K(\alpha)$ ومنه فإن;

$$K(\alpha^2)\subset K(\alpha) \qquad (3.2)$$

لنبين الآن الاحتواء العكسي من أجل ذلك نفرض أولا أن $\alpha\notin K(\alpha^2)$. بما أن α جبري على K فإن α^2 جبري على K وبالتالي $K(\alpha^2)$ حقلا. α جبري على K و ومنه α جبري على $K(\alpha^2)$ وبالتالي $K(\alpha^2)(\alpha)$ حقلا. نعتبر كثير الحدود:

$$p(x)=x^2-\alpha^2\in K(\alpha^2)[x]$$

كثير الحدود $p(x)$ يحقق $\deg p(x)=2\leq 3$ وجذوره هما α و $-\alpha$ لا ينتميان إلى $K(\alpha^2)$ ومنه فإن $p(x)$ غير قابل للاختزال في $K(\alpha^2)[x]$ وبالتالي فإن: $p(x)=\min(\alpha,K(\alpha^2),x)=x^2-\alpha^2\in K(\alpha^2)[x]$.
لدينا: $[K(\alpha^2)(\alpha):K(\alpha^2)]=2$ ومنه وحسب قانون الدرجات فإن :

$$K \overset{m}{---} K(\alpha^2) \overset{2}{---} K(\alpha^2)(\alpha)$$

$$[K(\alpha^2)(\alpha):K]=2m$$

لنبين أن $K(\alpha^2)(\alpha)=K(\alpha)$. واضح أن

$$K(\alpha)\subset K(\alpha^2)(\alpha) \qquad (4.2)$$

ولدينا: $\alpha\in K(\alpha)$ و $\alpha^2\in K(\alpha)$ ومنه

$$K(\alpha^2)(\alpha)\subset K(\alpha) \qquad (5.2)$$

من (4.2) و (5.2) نحصل على $K(\alpha^2)(\alpha)=K(\alpha)$ ومنه نتوصل إلى التناقض التالي: $[K(\alpha^2)(\alpha):K]=2m=2k+1$ وبالتالي فإن $\alpha\in K(\alpha^2)$ ومنه

$$K(\alpha)\subset K(\alpha^2) \qquad (6.2)$$

من (3.2) و (6.2) نتوصل إلى أنه إذا كان $[K(\alpha):K]=2k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$ فإن $K(\alpha)=K(\alpha^2)$.

التمرين 04:

لنبين أن $\mathbb{Q}(\sqrt{a})=\mathbb{Q}(\sqrt{b})$ إذا وفقط إذا كان $\frac{a}{b}$ مربعا تاما لعدد ناطق. لدينا $\frac{a}{b}$ مربعا تاما لعدد ناطق معناه

يوجد $\alpha \in \mathbb{Q}$ بحيث: $\frac{a}{b} = \alpha^2$. لنبرهن الاستلزام الأول أي لنفرض أن $\mathbb{Q}(\sqrt{a}) = \mathbb{Q}(\sqrt{b})$ ونبرهن أن $\frac{a}{b}$ مربعا تاما لعدد ناطق. من أجل ذلك نميز الحالتين التاليتين:
الحالة الأولى: حالة $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ أو $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$. في هذه الحالة لدينا:

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(\sqrt{a}) = \mathbb{Q}(\sqrt{b}) &\Longrightarrow \sqrt{a} \in \mathbb{Q} \quad \wedge \quad \sqrt{b} \in \mathbb{Q} \\ &\Longrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{Q} : \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \alpha \\ &\Longrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{Q} : \frac{a}{b} = \alpha^2\end{aligned}$$

ومنه $\frac{a}{b}$ مربع تام لعدد ناطق.
الحالة الثانية: حالة $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$ و $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$. في هذه الحالة لدينا:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{a}) = \mathbb{Q}(\sqrt{b}) \Longrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^* : \sqrt{a} = x + y\sqrt{b}$$

نفرض جدلا أن $x \neq 0$ فنجد

$$a = x^2 + by^2 + 2xy\sqrt{b}$$

ومنه

$$a - by^2 = x\left(x + 2y\sqrt{b}\right) = x\left(\sqrt{a} + y\sqrt{b}\right)$$

من خلال العلاقة أعلاه فإن $z = \sqrt{a} + y\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ وبما أن $x = \sqrt{a} - y\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ فإن $\sqrt{a} = \frac{x+y}{2} \in \mathbb{Q}$ وهذا تناقض مع كون $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$ إذن $x = 0$ و $\sqrt{a} = y\sqrt{b}$ أي أنه يوجد $y \in \mathbb{Q}$ بحيث $\sqrt{a} = y\sqrt{b}$ ومنه $\frac{a}{b}$ مربع تام لعدد ناطق.
لنبرهن الاستلزام الثاني أي لنفرض أن $\frac{a}{b}$ مربعا تاما لعدد ناطق ونبرهن أن $\mathbb{Q}(\sqrt{a}) = \mathbb{Q}(\sqrt{b})$. لدينا $\frac{a}{b}$ مربعا تاما لعدد ناطق معناه

$$\begin{aligned}\exists \alpha \in \mathbb{Q} : \frac{a}{b} = \alpha^2 &\Longrightarrow \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = |\alpha| \\ &\Longrightarrow \sqrt{a} = |\alpha|\sqrt{b}\end{aligned}$$

أي أن $\mathbb{Q}(\sqrt{a}) = \mathbb{Q}(\sqrt{b})$ وهو المطلوب.

التمرين 07:

❶ إثبات أن E توسيع جالوازي على $\mathbb{Q}$. لدينا:
(أ) واضح أن E توسيعا فصولا على $\mathbb{Q}$ لأن مميزة $\mathbb{Q}$ معدومة .
(ب) نعتبر كثير الحدود $f(x)$ المعرف بـ: $f(x) = (x^2+1)(x^2-3)$. لدينا: $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ و $\deg f(x) \geq 1$ وحقل جذور $f(x)$ على $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{C}$ هو E لأن

$$\mathbb{Q}(i, -i, \sqrt{3}, -\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{3}) = E$$

من (أ) و (ب) فإن E توسيعا جالوازيا على $\mathbb{Q}$.
❷ تعيين عنصرا مولدا θ لـ E ثم تعيين أساسين مختلفين لـ E على $\mathbb{Q}$. توجد لا نهاية من العناصر المولدة لـ E من بينها العنصر $\theta = i + \sqrt{3}$ ونكتب: $E = \mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(i + \sqrt{3})$. لنعين الآن أساسين مختلفين لـ E. لدينا:

$$\mathbb{Q} \underset{B_1=\{1,\sqrt{3}\}}{\overset{[\mathbb{Q}(\sqrt{3}):\mathbb{Q}]=2}{---}} \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \underset{B_2=\{1,i\}}{\overset{[E:\mathbb{Q}(\sqrt{3})]=2}{---}} \mathbb{Q}(i, \sqrt{3}) = E$$

الجداء B_E للأساسين B_1 و B_2 هو أساس لـ E ومنه فإن

$$B_E = \{1, \sqrt{3}, i, i\sqrt{3}\}$$

كذلك حسب قانون الدرجات لدينا:

$$[\mathbb{Q}(\theta):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(i,\sqrt{3}):\mathbb{Q}(\sqrt{3})] \times [\mathbb{Q}(\sqrt{3}):\mathbb{Q}] = 2 \times 2 = 4$$

إذن يمكن تعيين أساس B'_E لـ من E الشكل:

$$B'_E = \{1, \theta, \theta^2, \theta^3\}$$

❸ تعيين زمرة جالوا $G(E/\mathbb{Q})$. نبحث عن جميع التشاكلات الذاتية σ لـ E بحيث من أجل كل z من $\mathbb{Q}$ يكون $\sigma(z) = z$. لدينا:

$$\sigma : E \longrightarrow E$$
$$z = a + b\sqrt{3} + ci + di\sqrt{3} \longmapsto \sigma(z) / \quad \forall z \in \mathbb{Q} : \sigma(z) = z$$

لأن σ تماثل من E نحو E فإن

$$\sigma(z) = \sigma\left(a + b\sqrt{3} + ci + di\sqrt{3}\right) = \sigma(a) + \sigma(b)\sigma\left(\sqrt{3}\right) + \sigma(c)\sigma(i) + \sigma(d)\sigma(i)\sigma\left(\sqrt{3}\right)$$

وبما أن a و b و c و d من $\mathbb{Q}$ فإن $\sigma(a) = a$ و $\sigma(b) = b$ و $\sigma(c) = c$ و $\sigma(d) = d$ ومنه فإن:

$$\sigma(z) = a + b\sigma\left(\sqrt{3}\right) + c\sigma(i) + d\sigma(i)\sigma\left(\sqrt{3}\right)$$

يبقى إذن إيجاد القيم الممكنة للمقدارين $\sigma(i)$ و $\sigma(\sqrt{3})$ في E. من أجل ذلك لدينا:

$$i^2 = -1 \Longrightarrow \sigma\left(i^2\right) = \sigma(-1) \Longrightarrow [\sigma(i)]^2 = -1 \Longrightarrow \sigma(i) = \pm i$$

وكذلك

$$\sqrt{3}^2 = 3 \Longrightarrow \sigma\left(\sqrt{3}^2\right) = \sigma(3) \Longrightarrow \left[\sigma\left(\sqrt{3}\right)\right]^2 = 3 \Longrightarrow \sigma\left(\sqrt{3}\right) = \pm\sqrt{3}$$

ومنه نحصل على $\mathbb{Q}$-التشاكلات الذاتية التالية لـ E:

$$\sigma_0 : r \longmapsto r, \quad \forall r \in \mathbb{Q} \qquad \sigma_1 : r \longmapsto r, \quad \forall r \in \mathbb{Q}$$
$$i \longmapsto i \quad , \quad i \longmapsto -i$$
$$\sqrt{3} \longmapsto \sqrt{3} \qquad \sqrt{3} \longmapsto \sqrt{3}$$
$$\sigma_2 : r \longmapsto r, \quad \forall r \in \mathbb{Q} \qquad \sigma_3 : r \longmapsto r, \quad \forall r \in \mathbb{Q}$$
$$i \longmapsto i \quad , \quad i \longmapsto -i$$
$$\sqrt{3} \longmapsto -\sqrt{3} \qquad \sqrt{3} \longmapsto -\sqrt{3}$$

زمرة جالوا $G(E/\mathbb{Q})$ هي إذن المجموعة $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ مزودة بقانون تركيب التطبيقات $\circ$ ونكتب تجاوزا:

$$G(E/\mathbb{Q}) = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

جدول الزمرة $G(E/\mathbb{Q})$: الجدول الموالي يمثل جدول زمرة جالوا

o	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3
σ_0	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	σ_1	σ_0	σ_3	σ_2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_0	σ_1
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	σ_0

الزمر الجزئية للزمرة $G(E/\mathbb{Q})$: لتكن H زمرة جزئية من $G(E/\mathbb{Q})$ إذن $|H|$ يقسم $|G(E/\mathbb{Q})| = 4$ أي أن $|H| \in \{1,2,4\}$ ومنه نحصل على الزمر الجزئية التالية:

$$H_0 = \{\sigma_0\},\ H_1 = \{\sigma_0, \sigma_1\},\ H_2 = \{\sigma_0, \sigma_2\},\ H_3 = \{\sigma_0, \sigma_3\},\ H_4 = \{\sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3\}$$

❹ تعيين الحقول الجزئية الوسطية للحقل E. واضـــح أن:

$$E^{H_0} = \{z \in E : \sigma_0(z) = z\} = E, \quad E^{H_4} = \{z \in E : \sigma(z) = z,\ \forall \sigma \in H_4\} = \mathbb{Q}$$

ولدينـا:

$$\begin{aligned} E^{H_1} &= \{z \in E : \sigma(z) = z,\ \forall \sigma \in H_1\} \\ &= \{z \in E : (\sigma_0(z) = z) \ \wedge \ (\sigma_1(z) = z)\} \\ &= \{z \in E : a + b\sqrt{3} - ci - di\sqrt{3} = z = a + b\sqrt{3} - ci + di\sqrt{3}\} \\ &= \{a + b\sqrt{3},\ a, b \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}(\sqrt{3}). \end{aligned}$$

بالمثـــل نجـــد أن:

$$E^{H_2} = \mathbb{Q}(i) \text{ و } E^{H_3} = \mathbb{Q}(i\sqrt{3}).$$

التمرين 08:

❶ تعيين كثير الحـدود الأصغـــري $p(x) = \min(\alpha, \mathbb{Q}, x)$. لدينـا:

$$\begin{aligned} \alpha = \sqrt{5 + 4i\sqrt{3}} &\Longleftrightarrow \alpha^2 = 5 + 4i\sqrt{3} \\ &\Longleftrightarrow (\alpha^2 - 5)^2 = -48 \\ &\Longleftrightarrow \alpha^4 - 10\alpha^2 + 73 = 0 \end{aligned}$$

إذن يوجد كثير حدود واحدي $p(x) = x^4 - 10x^2 + 73 \in \mathbb{Q}[x]$ يحقق $\deg p(x) = 4 \geq 1$ و $p(\alpha) = 0$. يبقى فقط إثبات أن $p(x)$ غير قابل للاختزال على $\mathbb{Q}[x]$ حتى يكون هو كثير الحدود الأصغري لـ α على $\mathbb{Q}[x]$.
نفرض جدلا أن $p(x)$ قابل للاختزال على $\mathbb{Z}[x]$ عندئذ نميز الحالات التـالية:
الحالة الأولى: يوجد $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ مع $\deg g(x) = 3$ و $a \in \mathbb{Z}$ بحيث $p(x) = (x - a)g(x)$ وعلية يكون $(-a)$ جذرا صحيحا لـ $p(x)$ وحيث أن الجذر الصحيح لـ $p(x)$ يجب أن يكون قاسما لـ 73 فإن $a \in \{-1, 1, -73, 73\}$ ولكن $p(\pm 1) \neq 0$ و $p(\pm 73) \neq 0$ ومنه الحـالة الأولى غير ممكنـــة.
الحالة الثانية: تـوجد أعـداد صحيحة a، b، c و d بحيث: $p(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ ومنـــه $p(x) = x^4 + (a + c)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + bc)x + bd$. بالمطابقة مع عبـارة $p(x)$ نجـد:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ b + d + ac = -10 \\ ad + bc = 0 \\ bd = 73 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -b \\ -a + d + ac = -10 \\ a(d - c) = 0 \\ bd = 73 \end{cases}$$

نميز إذن الحالات الأربع التالية:

$$\begin{cases} b=73 \\ d=1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} b=1 \\ d=73 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} b=-1 \\ d=-73 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} b=-73 \\ d=-1 \end{cases}$$

في كل حالة من الحالات الأربع نحصل على تناقض إذن $p(x)$ غير قابل للاختزال على $\mathbb{Z}[x]$ ومنه $p(x)$ غير قابل للاختزال على $\mathbb{Q}[x]$.

تعيين مرافقات α. مرافقات α هي:

$$\alpha_1=\sqrt{5+4i\sqrt{3}}\text{، }\alpha_2=-\sqrt{5+4i\sqrt{3}}\text{، }\alpha_3=\sqrt{5-4i\sqrt{3}} \text{ و } \alpha_4=-\sqrt{5-4i\sqrt{3}}$$

إثبات أن $\sqrt{73}\notin\mathbb{Q}(\alpha)$. نفرض جدلا أن $\sqrt{73}\in\mathbb{Q}(\alpha)$ فيكون لدينا:

$$\mathbb{Q}\overset{2}{\underset{q(x)=x^2-73}{---}}\mathbb{Q}\left(\sqrt{73}\right)\overset{m}{\underset{l(x)}{---}}\mathbb{Q}\left(\sqrt{73}\right)(\alpha)$$

$$p(x)=\min(\alpha,\mathbb{Q},x),\ \deg p(x)=4$$

لدينا كذلك: $q(x)=x^2-73\in\mathbb{Q}[x]$ واحدي وغير قابل للاختزال في $\mathbb{Q}$ لأن $\mathbb{Q}$ حقل و $\deg p(x)=2\leq 3$ وجذور $q(x)$ اللذان هما $-\sqrt{73}$ و $\sqrt{73}$ لا ينتميان إلى $\mathbb{Q}$ وبالتالي فإن $2m=4$ أي أن $m=2$. نتحصل إذن على:

$$\begin{cases} l(x)=\min\left(\alpha,\mathbb{Q}\left(\sqrt{73}\right),x\right) \\ p(x)\in\mathbb{Q}[x]\subset\mathbb{Q}\left(\sqrt{73}\right)[x] \\ p(\alpha)=0 \end{cases}$$

ومنه فإن $l(x)$ يقسم $p(x)$ في $\mathbb{Q}\left(\sqrt{73}\right)[x]$.

في $\mathbb{C}[x]$ يمكننا كتابة $p(x)$ من الشكل: $p(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$ وبما أن $l(x)$ يقسم $p(x)$ فإن $l(x)$ يكتب على أحد الأشكال التالية:

$$l(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \text{ أو } l(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_3) \text{ أو } l(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_4)$$

الشكل الأول لـ $l(x)$: في هذه الحالة نجد

$$l(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)=x^2-5-4i\sqrt{73}\notin\mathbb{Q}\left(\sqrt{73}\right)[x]$$

وهذا تناقض مع كون $l(x)\in\mathbb{Q}\left(\sqrt{73}\right)[x]$.

الشكل الثاني لـ $l(x)$: في هذه الحالة نجد

$$l(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)=x^2-(\alpha_1+\alpha_3)x+\alpha_1\alpha_3$$

نفرض أن $(\alpha_1+\alpha_3)\in\mathbb{Q}\left(\sqrt{73}\right)$ أي نفرض وجود a و b من $\mathbb{Q}$ بحيث $\alpha_1+\alpha_3=a+b\sqrt{73}$ فنجد

$$(\alpha_1+\alpha_3)^2=\left(a+b\sqrt{73}\right)^2\Leftrightarrow 10+2\sqrt{73}=a^2+73b^2+2ab\sqrt{73}$$

وبالتالي $a^2+73b^2=10$ و $ab=1$ وهذا تناقض.

الشكل الثالث لـ $l(x)$: بنفس الطريقة كما في الشكلين السابقين نحصل على التناقض. نخلاصة للأشكال

الثلاثة السابقة لـ $l(x)$ فإن $\sqrt{73} \notin \mathbb{Q}(\alpha)$.

❷ إثبات أن حقل جذور $p(x)$ على $\mathbb{Q}$ هو $E = \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{73})$ وأن $[E:\mathbb{Q}] = 8$. لدينا:

$$E = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \mathbb{Q}(\alpha_1, -\alpha_1, \alpha_3, -\alpha_3) = \mathbb{Q}(\alpha, \alpha_3)$$

ولنثبت أن $\mathbb{Q}(\alpha, \alpha_3) = \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{73})$. لدينا $\alpha \in \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{73})$ ولدينا $\alpha\alpha_3 = \sqrt{73}$ ومنه $\alpha_3 = \sqrt{73}\alpha^{-1} \in \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{73})$ وعليه $\mathbb{Q}(\alpha, \alpha_3) \subset \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{73})$ ولدينا $\alpha \in \mathbb{Q}(\alpha, \alpha_3)$ و $\alpha_3 \in \mathbb{Q}(\alpha, \alpha_3)$ ومنه $\alpha\alpha_3 = \sqrt{73}$ إذن $\sqrt{73} \in \mathbb{Q}(\alpha, \alpha_3)$ ومنه فإن $\mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{73}) \subset \mathbb{Q}(\alpha, \alpha_3)$ و $E = \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{73})$.

لنثبت الآن أن $[E:\mathbb{Q}] = 8$. لدينا:

$$\mathbb{Q} \overset{4}{---} \mathbb{Q}(\alpha) \underset{h(x)=x^2-73}{\overset{2}{---}} \mathbb{Q}\left(\alpha, \sqrt{73}\right)$$

لدينا كذلك: $\deg h(x) = 2 \leq 3$ وجذور $h(x)$ هي $\sqrt{73}$ و $-\sqrt{73}$ لاتنتمي إلى الحقل $\mathbb{Q}(\alpha)$ ومنه $h(x)$ أصغري لـ $\sqrt{73}$ على $\mathbb{Q}(\alpha)$ ومنه حسب قانون الدرجات نجد:

$$[E:\mathbb{Q}] = \left[\mathbb{Q}\left(\alpha, \sqrt{73}\right):\mathbb{Q}\right] = \left[\mathbb{Q}\left(\alpha, \sqrt{73}\right):\mathbb{Q}(\alpha)\right] \times [\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$$
$$= 2 \times 4 = 8$$

❸ إثبات أن $B = \{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \sqrt{73}, \sqrt{73}\alpha, \sqrt{73}\alpha^2, \sqrt{73}\alpha^3\}$ تشكل أساسا لـ E على $\mathbb{Q}$. واضح أن الأساس هو $B = \{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \sqrt{73}, \sqrt{73}\alpha, \sqrt{73}\alpha^2, \sqrt{73}\alpha^3\}$

❹ الكتابة في الأساس B لجذور $p(x)$ و α^m من أجل $m \in \{4,5,6,7,8,9\}$. نعلم أن: α و $-\alpha$ مكتوبان في الأساس B و $\alpha_3 = \sqrt{73}\alpha^{-1}$ ولنكتب مقلوب α بدلالة عناصر الأساس. لدينا:

$$p(\alpha) \iff \alpha^4 - 10\alpha^2 + 73 = 0$$
$$\iff \alpha\left(\frac{10\alpha - \alpha^3}{73}\right) = 1$$
$$\implies \alpha^{-1} = \frac{10\alpha - \alpha^3}{73}.$$

ومنه فإن

$$\alpha_3 = \sqrt{73}\alpha^{-1} = \sqrt{73}\frac{10\alpha - \alpha^3}{73} = \frac{10}{73}\left(\alpha\sqrt{73}\right) - \frac{1}{73}\left(\alpha^3\sqrt{73}\right)$$
$$\alpha_4 = -\alpha_3 = -\tfrac{10}{73}\left(\alpha\sqrt{73}\right) + \tfrac{1}{73}\left(\alpha^3\sqrt{73}\right)$$

نتحصل كذلك على

$$\alpha^4 = 10\alpha^2 - 73,$$
$$\alpha^5 = 10\alpha^3 - 73\alpha,$$
$$\alpha^6 = 10\alpha^4 - 73\alpha^2$$
$$= 10\left(10\alpha^2 - 73\right) - 73\alpha^2$$
$$= 127\alpha^2 - 730,$$
$$\alpha^7 = 127\alpha^3 - 730\alpha,$$
$$\alpha^8 = 127\left(10\alpha^2 - 73\right) - 730\alpha^2$$
$$= \ldots$$

الفصل الثالث

المقاييس على حلقات رئيسية

في هذا الفصل سنتطرق إلى بعض المفاهيم الأساسية حول المقاييس والتي تعتبر مفهوما مركزيا في الجبر المجرد و نظرية الهندسة الجبرية وبعض الفروع الأخرى في المعادلات التفاضلية الجزئية .

1.3 مفاهيم أولية

سوف نتطرق في هذا الجزء إلى بعض المفاهيم الأولية .

تعريف 1.1.3

لتكن A حلقة واحدية وتبديلية و $M \neq \emptyset$ مجموعة مزودة بقانوني تركيب الأول نرمز له بـ $(+)$ ونسميه الجمع في A والثاني قانون تركيب خارجي بمؤثرات في A نرمز له بـ $(.)$ ونعرفه كمـايلي:

$$(.) : A \times M \longrightarrow M$$
$$(\lambda, x) \longmapsto \lambda.x$$

نقول عن $(M,+,.)$ أنها A-مقياس أو مقياس على A إذا تحققت الشروط التـالية:

1. $(M,+,.)$ زمرة تبديلية .
2. من أجل كل $a \in A$ و $x, y \in M$ لدينا : $a.(x+y) = a.x + a.y$.
3. من أجل كل $a, b \in A$ و $x \in M$ لدينا : $(a+b).x = a.x + b.x$.
4. من أجل كل $a, b \in A$ و $x \in M$ لدينا : $a.(b.x) = (a \times b).x$.
5. من أجل كل $x \in M$ لدينا : $1_A.x = x$.

خصائص 1.1.3: (بعض قواعد الحساب في الـ A-مقياس)

لتكن A حلقة واحدية وتبديلية و M مقياس على A. لدينا مـا يلي:

- من أجل كل $a \in A$ و $x, y \in M$ لدينا : $a.(x-y) = a.x - a.y$.
- من أجل كل $a \in A$ لدينا : $a.0_M = 0_M$.
- من أجل كل $a, b \in A$ و $x \in M$ لدينا : $(a-b).x = a.x - b.x$.
- من أجل كل $x \in M$ لدينا : $0_A.x = x.0_A = 0_M$.

تعريف 2.1.3

لتكن A حلقة واحدية وتبديلية و M مقياس على A و $N \subset M$. نقول إن N مقياسا جزئيا من M إذا وفقط إذا تحققت إحدى الشروط التـالية :

1. $(N,+,.)$ مقياس على A .
2. $(N,+)$ زمرة جزئية من $(M,+)$:و مستقرة بالنسبة للقانون الخارجي أي أن $A.N = N$ وبالتالي من

أجل كل $\lambda \in A$ و $x \in N$ لدينا : $\lambda.x \in N$.
❸ $N \neq \emptyset$ ومن أجل كل $\lambda \in A$ و $x, y \in N$ لدينا : $x - y \in N$ و $\lambda.x \in N$.
❹ $N \neq \emptyset$ ومن أجل كل $\lambda \in A$ و $x, y \in N$ لدينا : $x + \lambda.y \in N$.

ملاحظة 1.1.3

من أجل كل M مقياس على A فإن $\{0_M\}$ و M مقياسان جزئيان بينان .

مثال 1.1.3

لتكن A حلقة واحدية وتبديلية و $M = A$. نعتبر الجمع في A على أنه الجمع في M ونعرف القانون الخارجي على A على أنه عملية الضرب في A :

$$\begin{aligned}(.) : \quad A \times A &\longrightarrow A \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda.x\end{aligned}$$

حيث $(.)$ هو القانون الخارجي على M و $(\times)$ هي عملية الضرب في A. لدينا:
❶ $(M,+) = (A,+)$ زمرة تبديلية .
❷ من أجل كل $\alpha \in A$ و $x, y \in M = A$، لدينا:

$$\alpha.(x+y) = \alpha \times (x+y) = \alpha \times x + \alpha \times y = \alpha.x + \alpha.y$$

❸ من أجل كل $\alpha, \beta \in A$ و $x \in M$، لدينا :

$$(\alpha+\beta).x = (\alpha+\beta) \times x = \alpha \times x + \beta \times x = \alpha.x + \beta.x$$

❹ من أجل كل $\alpha, \beta \in A$ و $x \in M$، لدينا:

$$\alpha.(\beta.x) = \alpha \times (\beta \times x) = (\alpha \times \beta) \times x = (\alpha \times \beta).x$$

❺ من أجل كل $x \in M = A$، لدينا: $1_A.x = x$.

إذن كل حلقة A واحدية وتبديلية هي مقياس على نفسها . الجمع فيه هو الجمع في A والقانون الخارجي هو عملية الضرب في A .

ما هي المقاييس الجزئية من الـ A-مقياس على A؟
❶ المقاييس الجزئية في الـ A-مقياس على A هي المثاليات في A لأنه من تعريف المثالي هو زمرة جزئية بالنسبة للجمع في A ومستقر بالنسبة للضرب في أي عنصر من A . من المثاليات المتداولة في حلقة التي هي مقاييس جزئية فيها المثاليات من الشكـــل:

$$a.A = \{a.x \,/\, x \in A\}$$ مع a عنصر مثبت من A .

وهي المثاليات التي نسميها رئيسيـة وكذلك المثاليات من الشكـــل:

$$a_1.A+a_2.A+...+a_n.A=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i.\alpha_i \,/\, (\alpha_i)_{1\le i\le n}\in A^n\right\}$$

مـع $(a_i)_{1\le i\le n}\in A^n$ شعـاع مثبت بمركبـات في A .

❷ لتكن A واحدية وتبديلية و $n\in\mathbb{N}^*$ ولنعتبر المجموعة التـالية:

$$A^n=\left\{(x_1,x_2,...,x_n) \,/\, (x_i)_{1\le i\le n}\in A^n\right\}$$

نزود A^n بعملية الجمع المعرفة كمايلي: من أجل كل $(x_1,x_2,...,x_n)\in A^n$ و $(y_1,y_2,...,y_n)\in A^n$، لديـــنا:

$$(x_1,x_2,...,x_n)+(y_1,y_2,...,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n)$$

وبقانون التركيب الخارجي :

$$\begin{aligned}(.):\quad & A\times A^n\longrightarrow A^n\\ & (\lambda,(x_1,...,x_n))\longmapsto \lambda.(x_1,...,x_n)=(\lambda.x_1,...,\lambda.x_n)\end{aligned}$$

لنتأكد من الشروط الخمسة التـالية :

❶ $(M,+)=(A^n,+)$ زمرة تبديلية لأن $(A,+)$ زمرة تبديلية و $0_M=(0_A,0_A,...,0_A)$.

❷ من أجل كل $\alpha\in A$ و $x,y\in M=A$، لديـنا:

$$\begin{aligned}\alpha.(x+y)&=\alpha.(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n)\\ &=(\alpha.x_1+\alpha.y_1,\alpha.x_2+\alpha.y_2,...,\alpha.x_n+\alpha.y_n)\\ &=(\alpha.x_1,\alpha.x_2,...,\alpha.x_n)+(\alpha.y_1,\alpha.y_2,...,\alpha.y_n)\\ &=\alpha.(x_1,x_2,...,x_n)+\alpha.(y_1,y_2,...,y_n)\\ &=\alpha.x+\alpha.y\end{aligned}$$

بهذه الطريقة نتحقق من الشروط الثلاثة المتبقية ونستعمل في ذلك بنية الحلقة A وتعريف الجمع على A^n والقانون الخارجي بمؤثرات في A .

ملاحظة 2.1.3

المقاييس A^n على A حيث A حلقة واحدية وتبديلية و $n\ge 2$ هي من المقاييس المتداولة كثيرا وكل مقياس منها يحتوي مقاييس جزئية فعلى سبيل المثال كـلا من:

$$V=\left\{\alpha.x\in A^n \,/\, \alpha\in A\wedge x\in A^n\right\}\quad\text{و}\quad N=\left\{(x_1,x_2,...,x_n)\in A^n \,/\, \sum_{i=1}^{n}x_i=0_A\right\}$$

مقيـاسا جزئيـا مـن A^n .

❸ لتكن A حلقة واحدية وتبديلية . كل زمرة تبديلية نستطيع أن نزودها ببنية $\mathbb{Z}$-مقياس . لتكن $(G,*)$ زمرة تبديلية عنصرها الحيادي نرمز له بـ e . نعرف على G القانون الخارجي بمؤثرات في $\mathbb{Z}$ كالتـالي:

$$\begin{aligned}(.):\ & \mathbb{Z}\times G\longrightarrow G\\ & (n,g)\longmapsto n.g\end{aligned}$$

حيـث :

$$n.g=\begin{cases}\underbrace{g*g*...*g}_{\text{مرة } n}, & \text{إذا كان } n>0\\ e, & \text{إذا كان } n=0\\ \underbrace{g^{-1}*g^{-1}*...*g^{-1}}_{\text{مرة } (-n)}, & \text{إذا كان } n<0\end{cases}$$

إذا كانت G جمعية أي $(*=+)$ فـإن $n.g$ يصبح من الشكـــل:

$$n.g=\begin{cases}\underbrace{g+g+...+g}_{\text{مرة } n}, & \text{إذا كان } n>0\\ 0, & \text{إذا كان } n=0\\ \underbrace{(-g)+(-g)+...+(-g)}_{\text{مرة } (-n)}, & \text{إذا كان } n<0\end{cases}$$

لنتحقق أن $(G,+,.)$ له بنية $\mathbb{Z}$-مقياس. من أجل ذلك نتحقق من الشروط التـالية:

❶ من الفرض لدينا $(G,*)$ زمرة تبديلية.

❷ ليكن $n\in\mathbb{Z}$ و $x,y\in G$، لديـــنا:

$$n.(x*y)=\begin{cases}\underbrace{(x*y)*(x*y)*...*(x*y)}_{\text{مرة } n}, & \text{إذا كان } n>0\\ e, & \text{إذا كان } n=0\\ \underbrace{(x*y)^{-1}*(x*y)^{-1}*...*(x*y)^{-1}}_{\text{مرة } (-n)}, & \text{إذا كان } n<0\end{cases}$$

من كون $(G,*)$ زمرة تبديلية نجـد:

$$n.(x*y)=\begin{cases}\underbrace{x*x*...*x}_{\text{مرة } n}*\underbrace{y*y*...*y}_{\text{مرة } n}, & \text{إذا كان } n>0\\ e, & \text{إذا كان } n=0\\ \underbrace{x^{-1}*x^{-1}*...*x^{-1}}_{\text{مرة } (-n)}*\underbrace{y^{-1}*y^{-1}*...*y^{-1}}_{\text{مرة } (-n)}, & \text{إذا كان } n<0\end{cases}$$

إذن من أجل كل $n\in\mathbb{Z}$ و $x,y\in G$ نجـــد:

$$n.(x*y)=n.x*n.y$$

بهذه الطريقة نتحقق من الشروط الثلاثة المتبقية ونستعمل في ذلك بنية الزمرة التبديلية G وتعريف القانون الخارجي على G بمؤثرات في $\mathbb{Z}$.

المقاييس الجزئية لـ G هي زمرها الجزئية لأنه من أجل كل $n\in\mathbb{Z}$ و $h\in H\leq G$، لديـــنا:

$$H\ni n.h=\begin{cases}\underbrace{h*h*...*h}_{\text{مرة } n}, & \text{إذا كان } n>0\\ e, & \text{إذا كان } n=0\\ \underbrace{h^{-1}*h^{-1}*...*h^{-1}}_{\text{مرة } (-n)}, & \text{إذا كان } n<0\end{cases}$$

❹ لتكن A واحدية وتبديلية و I مجموعة غير خالية مع $\mathrm{Card}(I)\geq 2$. نضع: $M=\{f\,/\,f:I\to A\}$ ونعرف الجمع في M كمايلي : من أجل كل $x\in I$ و $f,g\in M$، لدينا:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

نعرف القانون الخارجي على M بمؤثرات في A كمايلي:

$$\begin{aligned}(.):\ & A\times M\longrightarrow M\\ & (\lambda,x)\longmapsto \lambda.x\end{aligned}$$

من أجل كل $x\in I$ ، $\lambda\in A$ و $f\in M$، لدينا: $(\lambda.f)(x)=\lambda f(x)$. للتأكد من أن $(M,+,.)$ هو A-مقياس نستعمل بنية الحلقة A فعلى سبيل المثال من أجل كل $\lambda\in A$ و $f,g\in M$، لدينا: $\lambda.(f+g)=\lambda.f+\lambda.g$ وذلك لأنه من أجل كل $x\in I$، لدينا:

$$\begin{aligned}\lambda.(f+g)(x)&=\lambda.[f(x)+g(x)]\\&=\lambda.f(x)+\lambda.g(x)\\&=(\lambda.f+\lambda.g)(x)\end{aligned}$$

بهذه الطريقة نتحقق من الشروط المتبقية. هذا المقياس M نرمز له بـ A^I.

❺ من أجل كل حلقة واحدية وتبديلية A فإن حلقة كثيرات الحدود بمعاملات في A وبمتغير x المعرفة بـ:

$$A[x]=\left\{f:f=\sum_{k\geq 0}a_kx^k\,/\,\forall k\geq 0:a_k\in A\right\}$$

هي عبارة عن A-مقياس، الجمع فيه معرف كما يلي :

من أجل كل $f=\sum_{k\geq 0}a_kx^k\in A[x]$ و $g=\sum_{k\geq 0}b_kx^k\in A[x]$، لدينا:

$$\sum_{k\geq 0}a_kx^k+\sum_{k\geq 0}b_kx^k=\sum_{k\geq 0}(a_k+b_k)x^k$$

والقانون الخارجي على $A[x]$ بمؤثرات في A معرف كما يلي:

$$\begin{aligned}(.):\quad & A\times A[x]\longrightarrow A[x]\\ & \left(\lambda,f=\textstyle\sum_{k\geq 0}a_kx^k\right)\longmapsto \lambda.f=\sum_{k\geq 0}(\lambda.a_k)x^k\end{aligned}$$

من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، نضع:

$$A_n[x]=\left\{f\,/\;f\in A[x]\wedge(\deg f\leq n)\right\}$$

يمكن بسهولة التحقق من أن $A_n[x]$ مقياس جزئي من الـ A-مقياس $A_n[x]$. نصطلح مما يلي:

$\deg(f=0)=-\infty$ و من أجل كل $a\in A$ مع $a\neq 0_A$ فإن : $\deg(f=a)=0$.

فيكون لدينا إذن :

$$A_0[x]=\left\{f\,/\;f\in A[x]\wedge(\deg f\leq 0)\right\}=A$$

❻ لتكن A حلقة واحدية وتبديلية و $m,n\in\mathbb{N}^*$. نضع: $M=M(n,m,A)$ مجموعة المصفوفات ذات n سطرا و m عمودا وبمعاملات في A . نعرف الجمع في M كالتـالي:

$$(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}+(b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}$$

والقانون الخارجي على M بمؤثرات في A معرف كما يلي:

$$\begin{aligned}(.):\quad & A\times M\longrightarrow M\\ & \left(\lambda,c=(c_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}\right)\longmapsto \lambda.c=(\lambda c_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}\end{aligned}$$

هذان القانونان يزودان $M=M(n,m,A)$ ببنية A-مقياس ويمكن التحقق من ذلك بسهولة وذلك باستعمال القانونيـن المعرفين أعلاه بالإضافة إلى بنية الحلقــة A .

حالة خاصة: عندما يكون $n=m$ أي عندما نعتبر $M=M(n,A)$ مجموعة المصفوفات المربعة ذات n سطرا و n عمودا مع $n\ge 1$. عندئذ يكون لدينـا:

- $M(n,A)$ هو A-مقياس .
- $M(n,A)$ هو حلقة واحدية .
- من أجل كل $\lambda\in A$ و $R,S\in M(n,A)$، لدينـا:

$$\lambda.(RS)=(\lambda.R)S=R(\lambda.S)$$

تسمى هذه البنية A-جبر أو جبر على A وهذا الـ A-جبر ليس تبديليا لأن الحلقة $M(n,A)$ ليست تبديلية .

هــل الـ A-مقيـاس $A[x]$ هـو A-جبــر تبديــلي؟

تعريف 3.1.3: (الجبر الجزئي)

نقـول أن N جبر جزئي من M إذا كـان $N\subset M$ ولـ N بنية A-جبر أي أن N يحقق الشـروط الثلاثــة أعـلاه.

2.3 المقياس حاصل القسمة

لتكن A حلقة واحدية وتبديلية و M مقياس على A و N مقياس جزئي من M. نعـرف في M العلاقة التـالية :

$$x\mathscr{R}y\Leftrightarrow x-y\in N$$

يمــكــن التحقق بسهولـــة من أن $\mathscr{R}$ عـلاقــة تكـافؤ على M.

أصناف التكافؤ بتردد العلاقة $\mathscr{R}$: ليكن $x\in M$، لدينـا:

$$\overline{x}=\{y\in M:y\mathscr{R}x\}=\{y\in M:y-x\in N\}=\{y\in M:y\in x+N\}$$

إذن من أجل كل $x \in M$، لدينا : $\overline{x} = x + N$ ومجموعة أصناف التكافؤ نرمز لها بـ (M/N). لدينا إذن:

$$M/N = \left\{ \overline{x} \,/\, x \in M \right\} = \left\{ x + N \,/\, x \in M \right\}$$

الجمع في (M/N)، معرف كمايلي: من أجل كل $\overline{x} \in (M/N)$ و $\overline{y} \in (M/N)$، لدينا:

$$\overline{x} \oplus \overline{y} = \overline{x + y}$$

وهو قانون تركيب داخلي في (M/N) . القانون الخارجي على (M/N) بمؤثرات في A معرف كمايلي:

$$\begin{aligned} (.) : \quad & A \times (M/N) \longrightarrow (M/N) \\ & (\lambda, \overline{x} = x + N) \longmapsto \lambda.\overline{x} = \overline{\lambda x} = \lambda x + N \end{aligned}$$

هذان القانونان يزودان (M/N) ببنية A-مقياس نسميه الـ A-مقياس حاصل القسمة لـ M على N.
ننتقل الآن إلى تحديد المقاييس الجزئية من الـ A-مقياس حاصل القسمة لـ M على N. لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 1.2.3

يكون H مقياسا جزئيا من (M/N) إذا وفقط إذا كان H من الشكل (L/N) مع N مقياس جزئي من L و L مقياس جزئي من M .

مثال 1.2.3

من أجل $A = M = \mathbb{Z}$ و $N = n\mathbb{Z}$ مع $n \geq 2$، لـ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ بنية $\mathbb{Z}$-مقياس حيث الجمع في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ معرف كما يلي: من أجل كل $\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ و ، $\overline{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$، لدينا:

$$\overline{x} \oplus \overline{y} = \overline{x + y}$$

والقانون الخارجي على $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ بمؤثرات في $\mathbb{Z}$ معرف كما يلي:

$$\begin{aligned} (.) : \quad & \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ & (\lambda, \overline{x} = x + n\mathbb{Z}) \longmapsto \lambda.\overline{x} = \overline{\lambda x} = \lambda x + n\mathbb{Z} \end{aligned}$$

المقاييس الجزئية من الـ $\mathbb{Z}$-مقياس $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ هي من الشكل $m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ حيث m يقسم n، فعلى سبيل المثال المقاييس الجزئية لـ $\mathbb{Z}$-مقياس $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ هي: $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ، $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$، $3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ و $6\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

3.3 المقياس الجداء

1.3.3 جداء عدد منتهي من المقاييس

لتكن A حلقة واحدية وتبديلية و M_1، M_2،...، M_n مقياسا مع $n \geq 2$. نعتبر الجداء الديكارتي :

$$\mathrm{P} = \prod_{i=1}^{n} M_i = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,/\, \forall i \in [[1,n]] : x_i \in M_i \right\}$$

نزود P بالجمع والقانون الخارجي التاليين:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

و

$$\begin{aligned}(.): \quad & A \times \mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{P} \\ & (\lambda, (x_1, ..., x_n)) \longmapsto \lambda.(x_1, ..., x_n) = (\lambda.x_1, ..., \lambda.x_n)\end{aligned}$$

فنحصل على بنية A-مقياس .

المقاييس الجزئية لـ A-مقياس P: لدينا الإستلزام التالي:

لتكن A حلقة واحدية وتبديلية. إذا كان N_1 ،N_2،...،N_n n A-مقياساً جزئي من الـ M_1 ،M_2،...،M_n n A-مقياس على الترتيب فإن $\mathrm{P}' = \prod_{i=1}^{n} N_i = N_1 \times N_2 \times ... \times N_n$ مقياس جزئي من الـ A-مقياس P:

$$\mathrm{P} = \prod_{i=1}^{n} M_i = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n .$$

هل كل مقياس جزئي من P يكتب من الشكل : $\mathrm{P}' = N_1 \times N_2 \times ... \times N_n$ مع N_i مقياس جزئي من M_i وذلك من أجل كل $i \in [[1,n]]$ ؟

لدينا: $0_{\mathrm{P}} \in N_1 \times N_2 \times ... \times N_n$ لأن $0_{\mathrm{P}} = (0_{M_1}, 0_{M_2}, ..., 0_{M_n})$ ومن أجل كل $i \in [[1,n]]$ فإن $0_{M_i} \in N_i$. ليكن $\lambda \in A$ و لتكن $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{P}'$ حيث $\mathrm{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ و $\mathrm{Y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$، لدينا:

$$\begin{aligned}\mathrm{X} + \lambda\mathrm{Y} &= (x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda(y_1, y_2, ..., y_n) \\ &= (x_1 + \lambda y_2, x_2 + \lambda y_2, ..., x_n + \lambda y_n)\end{aligned}$$

بما أنه من أجل كل $i \in [[1,n]]$، لدينا: $x_i + \lambda y_i \in N_i$ فإن $\mathrm{X} + \lambda\mathrm{Y} \in \mathrm{P}'$ وعليه فإن P' مقياس جزئي من P .

نعتبر الـ $\mathbb{Z}$-مقياس $\mathrm{P} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$، لدينا: $\mathrm{P}' = \{(\overline{0},\overline{0}) \times (\overline{1},\overline{1})\}$ مقياس جزئي من P ولكنه ليس جداء ديكارتي لمقياسين جزئيين N_1 و N_2 من $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. إذن ليس كل مقياس جزئي من P يكتب من الشكل:

$\mathrm{P}' = N_1 \times N_2 \times ... \times N_n$ مع N_i مقياس جزئي من M_i وذلك من أجل كل $i \in [[1,n]]$.

2.3.3 جداء عدد غير منتهي من المقاييس

لتكن A حلقة واحدية وتبديلية و $F = (M_i)_{i \in I}$ عائلة من الـ A-مقياس بحيث $\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(I) \geq 2$. نعتبر الجداء الديكارتي :

$$\mathrm{P} = \prod_{i \in I} M_i = \left\{ (x_i)_{i \in I} \ / \ \forall i \in I : x_i \in M_i \right\}$$

نزود P بالجمع والقانون الخارجي التاليين:

$$(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} = (x_i + y_i)_{i \in I}$$

و

$$\begin{aligned}(.): \quad & A \times \mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{P} \\ & (\lambda, (x_i)_{i \in I}) \longmapsto \lambda.(x_i)_{i \in I} = (\lambda x_i)_{i \in I}\end{aligned}$$

باستعمال تعريف هذين القانونين ومن كون أنه من أجل كل $i \in I$ لـ M_i بنية A-مقياس يمكن أن نتحقق بسهولة أن P هو A-مقياس، نسميه المقياس الجداء للعائلة $F = (M_i)_{i \in I}$.

المقاييس الجزئية لـ A-مقياس P: نعتبر المجموعة التـالية:

$$H = \left\{ (x_i)_{i\in I} \in \mathrm{P} \,/\, \exists J \subset I : x_i = 0,\ \forall i \notin J \right\}$$

مع P مجموعة منتهية ولنثبت أن H مقيـاس جزئي من P .
باعتبار $\emptyset$ مجموعة منتهية يكون لدينـا: $0_{\mathrm{P}} \in H$ لأنه في هذه الحالة لدينـا: $(0_{M_i})_{i\in I} \in H$. ليكن $\lambda \in A$ و ليكن $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in H$، لدينـا:

$$\mathrm{X} \in H \Longleftrightarrow \mathrm{X} = (x_i)_{i\in I} \in \mathrm{P} \,/\, \exists J_1 \subset I : x_i = 0,\ \forall i \notin J_1$$
$$\mathrm{Y} \in H \Longleftrightarrow \mathrm{Y} = (y_i)_{i\in I} \in \mathrm{P} \,/\, \exists J_2 \subset I : y_i = 0,\ \forall i \notin J_2$$

عندئذ يكون لدينـا: $x_i + y_i = 0,\ \forall i \notin (J = J_1 \cup J_2)$ وبمـا أن J_1 و J_2 منتهيين فـإن J منتهية وعليه يكون لدينـا: $\mathrm{X} + \lambda \mathrm{Y} = (x_i + \lambda y_i)_{i\in I} \in \mathrm{H}$ ومنه فـإن H مقياس جزئي من P، نرمز له بالرمز $\bigoplus_{i\in I} M_i$ ونسميه المجمـوع المبـاشر لعائـلة المقـاييس $(M_i)_{i\in I}$.

4.3 عمليات على المقاييس الجزئية

(أ) الاتحاد : لتكن A حلقة واحدية وتبديلية و M A-مقياس. لدينا المبرهنة التـالية:

مبرهنة 1.4.3: (الاتحاد المنتهي لمقاييس جزئية)

ليكن N و H مقياسيين جزئيين من M، لدينـا:

$N \cup H$ مقياس جزئي من M إذا وفقط إذا كان $N \subset H$ أو $H \subset N$.

يمكن تعميم المبرهنة أعلاه إلى حالة اتحاد عائلة منتهية أو كيفية من المقاييس الجزئية على النحو التـالي:

مبرهنة 2.4.3: (الاتحاد غير المنتهي لمقاييس جزئية)

ليكن M A-مقياس و N_n ، $N_1, \ldots, N_1$ n مقياسا جزئيا من M مع $n \geq 3$. إذا كانت العائلة $F = (N_i)_{1\leq i\leq n}$ مرتبة كليا بالاحتواء فإن الاتحاد المنتهي $\bigcup_{i=1}^{n} N_i$ مقياسا جزئيا من M ويبقى هذا الاستلزام صحيحا من أجل إتحاد عائلة كيفية من المقاييس لكن الاستلزام العكسي ليس صحيحـا دومـا.

(ب) التقاطع: لدينـا المبرهنة التـالية:

مبرهنة 3.4.3: (التقاطع الكيفي لمقاييس جزئية)

لتكن A حلقة واحدية وتبديلية و M A-مقياس و $F = (N_i)_{i\in I}$ مع $\mathrm{Card}(F) \geq 2$ عائلة كيفية من المقاييس الجزئية من M، عندئذ للتقاطع الكيفي $\bigcap_{i\in I} N_i$ بنية A-مقياس .

(جـ) الجمع: لدينـا المبرهنة التـالية:

مبرهنة 4.4.3: (مجموع عائلة منتهية من المقاييس الجزئية)

ليكن M A-مقياس و N_n ، N_1،...،N_1 n مقياس جزئي من M مع $n \geq 2$. نضع:

$$\sum = \sum_{i=1}^{n} N_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \,/\, x_i \in N_i \,,\ \forall i \in [[1,n]] \right\}$$

لدينا ما يلي:

❶ $\sum$ مقياس جزئي من M .

❷ من أجل كل $P \subset \{1,2,...,n\}$ و $P \neq \emptyset$ فإن $\sum_{i \in P} N_i$ مقياس جزئي من M .

❸ $\sum$ هو أصغر المقاييس الجزئية الذي يحوي $\bigcup_{i=1}^{n} N_i$.

(د) المجموع المباشر: لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 5.4.3: (المقاييس الجزئية المنفصلة والمجموع المباشر)

ليكن M A-مقياس و N_n ، N_1،...،N_1 n مقياس جزئي من M مع $n \geq 2$. نضع:

$$\forall i \in [[1,n]] : N_i' = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} N_j \quad \text{و} \quad \sum = \sum_{i=1}^{n} N_i$$

القضايا الخمس التالية متكافئة:

❶ كل $x \in \sum$ يكتب بطريقة وحيدة من الشكل:

$$x = x_1 + x_2 + ... + x_n \,/\, \forall i \in [[1,n]] : x_i \in N_i$$

❷ العنصر 0_M يكتب بطريقة وحيدة من الشكل:

$$0_M = \underbrace{0_M + 0_M + ... + 0_M}_{n \text{ مرة}}$$

❸ من أجل كل $i \in [[1,n]]$، لدينا: $N_i' \cap N_i = \{0_M\}$.

❹ من أجل كل $i \in [[1,n-1]]$، لدينا: $N_i' \cap \sum_{j=i+1}^{n} N_j = \{0_M\}$.

❺ من أجل كل $i \in [[1,n-1]]$، لدينا: $N_{i+1} \cap \sum_{j=1}^{i} N_j = \{0_M\}$.

إذا تحققت إحدى هذه القضايا الخمس نقول أن العائلة $\{N_1, N_2, ..., N_n\}$ هي عائلة منفصلة من المقاييس الجزئية ونقول عن المجموع $\sum$ أنه مجموع مباشر للمقاييس الجزئية $(N_i)_{1 \leq i \leq n}$ ونكتب عندئذ:

$$\sum_{i=1}^{n} N_i = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i = N_1 \oplus N_2 \oplus ... \oplus N_n \,.$$

تعريف 1.4.3: (الجملة المولدة)

لتكن A حلقة واحدية وتبديلية و M A-مقياس و F مقياس جزئي من M و $\emptyset \neq G \subseteq F$. نقول أن G جملة مولدة لـ F ونكتب: $F =< G >$ إذا وفقط إذا حققت إحدى القضايا الثلاث المتكافئة:

❶ $\forall x \in F\ ,\ \exists n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \exists g_1, g_2, ..., g_n \in G\ ,\ \exists a_1, a_2, ..., a_n \in A : x = \sum_{i=1}^{n} a_n g_n$.

❷ $x = \sum_{g \in G} Ag = \sum_{g \in G} \{ag \ / \ a \in A\}$

❸ F هو أصغر مقياس جزئي من M يحوي G ونقول عن G أنها مولدة أصغرية لـ F إذا وفقط إذا كانت مولدة لـ F و كان من أجل كل $g \in G$ ، لدينا: $F \not< G - \{g\} >$.

تعريف 2.4.3: (المقياس من النوع المنتهي والمقياس من النوع غير المنتهي)

لتكن A حلقة واحدية وتبديلية و M A-مقياس. نقول أن M من النوع المنتهي إذا وفقط إذا كان يقبل جملة مولدة منتهية ونقول أن M من النوع غير المنتهي إذا وفقط إذا كان لا يقبل أي جملة مولدة منتهية أي أن كل جملة مولدة له غير منتهية.

كنتيجة مباشرة للتعريف السابق. لدينا ما يلي:

نتيجة 1.4.3

ليكن M A-مقياس، لدينا مايلي :

- إذا كان M منتهي فإنه من النوع المنتهي .
- إذا كان M من النوع غير المنتهي فإنه غير منتهي .
- إذا كان كل مقياس جزئي N من M من النوع المنتهي فإن M من النوع المنتهي .

تعريف 3.4.3: (الجملة المستقلة خطيا)

ليكن M A-مقياس و $L \subset M$ مع $L \neq \emptyset$. نقول عن L أنها مستقلة خطيا على A إذا وفقط إذا كان من أجل كل $P = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset L$ مع $n \in \mathbb{N}^*$ فإن P يحقق الاستلزام التالي:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0_M \right) \Longrightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0_A)$$

من التعريف السابق يأتي مباشرة مايلي:

نتيجة 2.4.3

لدينا النتائج التالية:

❶ الجملة المستقلة خطيا لا تشمل الصفر أبدا.

❷ إذا كانت L جملة مستقلة خطيا فإن كل جملها الجزئية غير الخالية هي أيضا مستقلة خطيا.

عكس الاستقلال الخطي هو الارتباط الخطي ونقول عن جملة $G \neq \emptyset$ في M أنها مرتبطة خطيا إذا وفقط إذا وجدت جملة منتهية جزئية منها لا تحقق استلزام الاستقلال الخطي.

نقول عن جملة مستقلة خطيا L أنها أعظمية إذا وفقط إذا كان من أجل كل $x \in M - L$ فإن المجموعة $L \cup \{x\}$ مرتبطة خطيا.

تعريف 4.4.3: (الأساس لمقياس كيفي)

ليكن M A-مقياس و $B \subset M$ مع $B \neq \emptyset$. نقول عن B أنها أساس لـ M إذا تحقق الشرطين:

❶ الجملة B مولدة لـ M أي أن: $< B >= M$.

❷ الجملة B مستقلة خطيا.

تعريف 5.4.3: (المقياس الحر)

ليكن M A-مقياس. نقول أنه حر إذا وفقط إذا كان يقبل أساسا وتوجد أربعة أنواع من المقاييس هي:

❶ حر ومن النوع المنتهي ومثال ذلك:

$$A^n = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \ / \ \forall i \in [[1,n]] : x_i \in A \right\} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*).$$

هو A-مقياس حر من النوع المنتهي أساسه القانوني هو:

$$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \ / \ \forall i \in [[1,n]] : e_i = \left(\underbrace{0,0,...,}_{i-1} \underbrace{1}_{i} \underbrace{,0,...,0}_{n-i} \right)$$

وبصفة عامة كل حلقة واحدية وتبديلية تعتبر مقياسا حرا على نفسها أساسه $\{1_A\}$.

❷ حر ومن النوع غير المنتهي ومثال ذلك: من أجل كل حلقة A واحدية وتبديلية فإن $A[x]$ مقياس حر من النوع غير المنتهي أساسه القانوني هو:

$$B = \left\{ 1, x, x^2, ... \right\} = \left\{ x^n \ / \ n \in \mathbb{N}, \ x^0 = 1_A \right\}$$

❸ ليس حر ومن النوع المنتهي ومثال ذلك: الـ $\mathbb{Z}$-مقياس $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ مع $n \geq 2$ ليس حر ومن النوع المنتهي وذلك لأن المجموعة المنتهية $G = \{\overline{1}\}$ مولدة لـ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

❹ ليس حر وليس من النوع المنتهي ومثال ذلك: الـ $\mathbb{Z}$ مقياس $M = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$ يقبل الجملة $\{1, x, x^2, ...\}$ غير المنتهية كمولدة لـ M لكنها مرتبطة خطيا.

تعريف 6.4.3: (رتبة مقيـاس حـر)

ليكن M A-مقياس حر .

❶ كـل أسس M متسـاوية في القـدرة .

❷ العـدد الأصلي لأسـاس B لـ M نسميه رتبة M ونكتب: $\mathrm{Rang}(M)=\mathrm{Card}(B)$ وإذا كان M يقبل أسـاسا منتهيا عـدد عنـاصره $n\in\mathbb{N}^*$ نكتـب: $\mathrm{Rang}(M)=n$.

مثال 1.4.3

من الأمثـلة لدينا مايــلي:

$$\mathrm{Rang}_A(A^n)=n\,,\ \mathrm{Rang}_A(A[x])=+\infty\,,\ \mathrm{Rang}_A(A)=1.$$

تعريف 7.4.3: (تماثل المقاييس)

ليكن M و M' مقياسين على حلقة واحدية وتبديلية A و $f:M\longrightarrow M'$ تطبيق . نقول عن f أنه خطي على A أو تماثـل مقاييس إذا تحقق مـا يـلي:

من أجل كل $\lambda\in A$ و $x,y\in M$ لدينا :

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \text{و} \quad f(\lambda x)=\lambda f(x)$$

وهذا يكافئ أنه من أجل كل $\lambda\in A$ و $x,y\in M$ فـإن:

$$f(x+\lambda y)=f(x)+f(\lambda y)=f(x)+\lambda f(y)$$

نرمز لمجموعة التطبيقات الخطية من M نحو M' بالرمز $\hom_A(M,M')$ وهذه المجموعـة عندما نزودها بالجمع والقانون الخـارجي التاليين:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$$

وذلك من أجل كـل $\lambda\in A$، $x\in M$ و $f,g\in\hom_A(M,M')$ نحصل على بنية A-مقيـاس.

خصائص 1.4.3

ليكن M و M' مقياسين و $f\in\hom_A(M,M')$، لدينـا:

❶ $f(0_M)=0_{M'}$.

❷ من أجل كل $x,y\in M$، لدينـا: $f(x-y)=f(x)-f(y)$.

❸ من أجل كل مقياس جزئي N من M، لدينا: $f(N)$ مقياس جزئي من M' .
❹ من أجل كل مقياس جزئي N' من M'، لدينا: $f^{-1}(N')$ مقياس جزئي من M .
❺ المقياس الجزئي $f^{-1}(\{0_{M'}\})$ نرمز له بـ $Kerf$ ونسميه نواة f ولدينا:

- f متباين إذا وفقط إذا كان $Kerf = \{0_M\}$.
- نظرية التشاكل الأولى: $(M/Kerf) \cong f(M)$.

5.3 تمارين مقترحة حول الفصل الثالث

التمرين 01:

❶ لتكن A و B حلقتين واحديتين وتبديليتين و $0 \neq \varphi \in \hom(A,B)$. نعتبر قانون التركيب الخارجي المعرف على B بمؤثرات في A كما يلي:

$$A \times B \longrightarrow B$$
$$(a,b) \longmapsto \varphi(a)\, b$$

- هل التركيب الخارجي على B مع الجمع في B يزودانه ببنية A-مقياس؟

❷ لتكن $n \in \mathbb{N}^*$. نعتبر قانون التركيب الخارجي المعرف على $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ بمؤثرات في $\mathbb{Z}$ كما يلي:

$$(.) : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$
$$(n, \overline{x}) \longmapsto n.\overline{x} = \overline{nx}$$

- بين أن قانون التركيب الخارجي على $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ مع الجمع في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ يزودانه ببنية A-مقياس .
- بين أن N مقياس جزئي من الـ $\mathbb{Z}$-مقياس $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ يكافئ أن $(N,+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$.
- من أجل كل $n \in \{4,6,8,10,12\}$، عين كل المقاييس الجزئية من $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

❸ لتكن $n \in \mathbb{N}^*$ ولنعتبر قانون التركيب الخارجي المعرف على $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ بمؤثرات في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ كما يلي:

$$(.) : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$
$$(\overline{x}, \overline{y}) \longmapsto \overline{x}.\overline{y} = \overline{xy}$$

- بين أن N مقياس جزئي من الـ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-مقياس $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ يكافئ أن $(N,+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$.
- من أجل كل $n \in \{4,6,8,10,12\}$، عين كل المقاييس الجزئية من الـ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-مقياس $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

التمرين 02:

لتكن A حلقة، M A-مقياس و P، N و H ثلاثة مقاييس جزئية من M.

❶ بين أن: $(H \cap P) + (N \cap P) \subseteq (H+N) \cap P$.

❷ بين أن: $N \subseteq P \Rightarrow (H \cap P) + (N \cap P) = (H+N) \cap P$.

❸ كون مثالا بحيث: $(H \cap P) + (N \cap P) \subsetneq (H+N) \cap P$.

التمرين 03:

لتكن A حلقة رئيسية و $a_1, \ldots, a_n \in A$ $(n \geq 2)$ عناصر من A أولية فيما بينها .

❶ بين أن: $V = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n \,/\, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right\}$ مقياس جزئي من A^n وأن $\frac{A^n}{V} \cong A$.

❷ ليكن $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in A^n$ بحيث $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 1$ (علاقة بيزوت). برهن أن $A^n = V \oplus N$ حيث $N = \langle \lambda \rangle$ هو المقياس الجزئي من A^n المولد بـ λ .

❸ ليكن $v = (x_1, \ldots, x_n) \in V$. تأكد أن $v + \lambda$ يحقق علاقة بيزوت واستنتج أن V يقبل ما لانهاية من المقاييس الجزئية الإضافية في A^n .

❹ في كل حالة من الحالات التالية عين مقياسين جزئيين من $\mathbb{Z}^2$ إضافيين للمقياس الجزئي V :

$$\left[A = \mathbb{Z},\ n = 3,\ a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5 \right] \quad \text{و} \quad \left[A = \mathbb{Z},\ n = 2,\ a_1 = 2,\ a_2 = 3 \right]$$

التمرين 04:

لتكن A حلقة و I مجموعة غير خالية. نعتبر المجموعتين A^I و$A^{(I)}$ المعّرفتين كما يلي:

$$A^I = \left\{(a_i)_{i\in I} / a_i \in A, (\forall_i \in I)\right\} = \{f / f : I \to A\}$$
$$A^{(I)} = \left\{(a_i)_{i\in I} \in A^I / \left(\exists S \subset I\,, \text{Card}(S) < +\infty\right) \wedge (a_i = 0)\ (\forall i \notin S)\right\}$$
$$A^{(I)} = \left\{f \in A^I / \left(\exists S \subset I\,, \text{Card}(S) < +\infty\right) \wedge (f(i) = 0)\ (\forall i \notin S)\right\}$$

❶ ذكر بالجمع $(+)$ والقانون الخارجي على A^I الذين يزودانه ببنية A-مقياس .

❷ أثبت أن $A^{(I)}$ مقياس جزئي حر من A^I. هل هو من النوع المنتهي؟ برر إجابتك .

❸ ليكن $S \subset I$. نضع:

$$N_S = \left\{(a_i)_{i\in I} / a_i = 0\,, (\forall_i \notin S)\right\} = \left\{f \in A^I / f(i) = 0\ (\forall_i \notin S)\right\}$$

- تأكد أن N_S مقياس جزئي من A^I .
- عين مقياسا جزئيا V من A^I بحيث يحقق $A^n = N_S \oplus V$.

❹ نفرض أن $I = \{1, 2, ..., n\}\,, (n \geq 2)$ مجموعة منتهية. برهن أن $A^I = A^{(I)} = A^n$.

❺ نعتبر $A = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. بين أن $A^2 = N \oplus V$ حيث N و V مقياسين جزئيين من A^2 يطلب تعيينهما .

❻ من أجل $A = \mathbb{Z}$ و $I = \mathbb{N}$، نعتبر المجموعة التالية:

$$N = \left\{(u_n)_{n\in} / (u_0, u_1 \in \mathbb{Z}) \wedge \left(u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\,, (n \geq 2)\right)\right\}$$

- أثبت أن N مقياس جزئي من $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ رتبته 2 معينا أساسا له .

التمرين 05:

لتكن A حلقة و M A-مقياس

❶ من أجل $x \in M$، نضع:

$$Ann(x) = \left\{\lambda \in A / \ \lambda.x = 0_M\right\}$$

- بين أن $Ann(x)$ مثالي من A .

❷ ليكن $x \in M - \{0_M\}$ بحيث $Ann(x) = \{0_A\}$.

- بين أن $\langle\{x\}\rangle$ عامل مباشر في M إذا وفقط إذا وجد $f \in \hom_A(M, A)$ بحيث: $f(x) = 1$.

❸ لتكن N مجموعة جزئية غير خالية من M، نضع:

$$Ann(N) = \left\{\lambda \in A / \ \lambda.x = 0_M\,(\forall x \in N)\right\}$$

- أثبت القضيتين التاليتين:

(أ) $Ann(N)$ مثاليا من A (ب) $Ann(N + H) = Ann(N) \cap Ann(H)\,, (\forall H \subseteq M)$

❹ ليكن I مثاليا من A بحيث $I \subseteq Ann(M)$ ولنعرف قانون التركيب الخارجي على M بمؤثرات في (A/I) كما يلي:

$$(A/I) \times M \to M$$
$$(\overline{a}, x) \mapsto \overline{a}.x = ax$$

• بين أن قانون التركيب الخارجي على M مع الجمع في M يزودانه ببنية (A/I)-مقياس .

❺ نعتبر $A=\mathbb{Z}$ و $M=\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ وليكن I مثاليا من M بحيث: $I \subseteq Ann(M)$.

• عين $Ann(M)$ ثم عين مجموعة المقاييس الجزئية من M باعتبارها $(\mathbb{Z}/I)$-مقياس .

التمرين 06:

لتكن A حلقة تامة، M A-مقياس و $T(M)=\{x\in M/Ann(x)\supset\{0\}\}$.

❶ بين أن $T(M)$ مقياس جزئي من M وأن $T\left(\frac{M}{T(M)}\right)=\{T(M)\}=\left\{0_{\frac{M}{T(M)}}\right\}$.

❷ عين $T(M)$ وذلك في حالة $A=\mathbb{Z}$ و $M=\frac{\mathbb{Z}^2}{\langle(4,6)\rangle}$.

❸ بين أنه إذا وجد مقياس جزئي ذو التواء N من M بحيث $\frac{M}{N}$ ذو التواء فإن M ذو التواء.

❹ نفرض أن M $\mathbb{Z}$-مقياس من النوع المنتهي بين أن M منته إذا وفقط إذا كان M ذو التواء .

❺ تأكد أن $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ هو $\mathbb{Z}$-مقياس ذو التواء واستنتج أنه ليس من النوع المنتهي .

التمرين 07:

لتكن A حلقة و M A-مقياس.

❶ برهن أن: (M من النوع المنتهي) إذا وفقط إذا كان $(\exists n\in\mathbb{N}^*,\ \exists N\subset A: M\simeq\frac{A^n}{N})$

❷ نعتبر $A=\mathbb{Z}$ و $M=\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$. بين أن الجملة $\{\overline{2},\ \overline{3}\}$ مولدة لـ M وبين أن $\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}\simeq\frac{\mathbb{Z}^2}{V}$ حيث V مقياس جزئي من $\mathbb{Z}^2$ يطلب تعيينه.

6.3 حلول بعض تمارين الفصل الثالث

التمرين 01:

❶ لنتحقق ما إذا كان قانون التركيب الخارجي على B مع الجمع في B يزودانه ببنية A-مقيـاس. نتحقق من الشروط الأربعة التـالية:

الشرط الأول: ليكن b و b' من B و a من A، لدينا:

$$a.(b+b')=\varphi(a)(b+b')=\varphi(a)b+\varphi(a)b'=a.b+a.b'$$

الشرط الثاني: ليكن a و a' من A و b من B، لدينا:

$$(a+a').b=\varphi(a+a')b=\varphi(a)b+\varphi(a')b=a.b+a'.b$$

الشرط الثالث: ليكن a و a' من A و b من B، لدينا:

$$(aa').b=\varphi(aa')b=(\varphi(a)\varphi(a'))b=\varphi(a)(\varphi(a')b)=a.(\varphi(a')b)=a.(a'.b)$$

الشرط الرابع: ليكن b من B. هـل $1_A.b=b$؟ حتى يكون $1_A.b=b$ يجب أن يكون $\varphi(1_A)=1_B$ لكن هذا ليس محققـا دوما ومنه B ليست A-مقيـاس.

❷ لنبين أن قانون التركيب الخارجي على $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ مع الجمع في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ يزودانه ببنية $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-مقيـاس. نتحقق من الشروط الأربعة التـالية:

الشرط الأول: ليكن λ من $\mathbb{Z}$ و $\overline{x}$ و $\overline{y}$ من $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$، لدينا:

$$\lambda.(\overline{x}+\overline{y})=\lambda.\overline{(x+y)}=\overline{\lambda(x+y)}=\overline{\lambda x+\lambda y}=\overline{\lambda x}+\overline{\lambda y}=\lambda.\overline{x}+\lambda.\overline{y}$$

الشرط الثاني: ليكن λ وμ من $\mathbb{Z}$ وليكن $\overline{x}$ من $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$، لدينا:

$$(\lambda+\mu).\overline{x}=\overline{(\lambda+\mu)x}=\overline{\lambda x+\mu x}=\overline{\lambda x}+\overline{\mu x}=\lambda.\overline{x}+\mu.\overline{x}$$

الشرط الثالث: ليكن λ وμ من $\mathbb{Z}$ وليكن $\overline{x}$ من $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$، لدينا:

$$(\lambda\mu).\overline{x}=\overline{\lambda\mu x}=\lambda.\overline{(\mu x)}=\lambda.(\mu.\overline{x})$$

الشرط الرابع: ليكن $\overline{x}$ من $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$، لدينا:

$$1_{\mathbb{Z}}.\overline{x}=\overline{1_{\mathbb{Z}}x}=\overline{x}$$

ومنـه $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ هي $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-مقيـاس.

إثبـات التكافؤ: N مقياس جزئي من الـ $\mathbb{Z}$-مقيـاس $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ يكافئ أن $(N,+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. لدينا تعريفا إذا كان N مقياس جزئي من الـ $\mathbb{Z}$-مقياس $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ فإن $(N,+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. لنبرهن الآن الاستلزام الثاني. من أجل ذلك يكفي أن نبيـن أن:

$$\forall\lambda\in\mathbb{Z},\ \forall\overline{x}\in N:\lambda\overline{x}\in N$$

لدينـا:

$$(N,+)\leq\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}},+\right)\Longleftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}:\left(N=\frac{k\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)\ \wedge(k\mid n)$$

$$\overline{x} \in N \Longleftrightarrow x \in k\mathbb{Z}$$

$$\Longleftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{Z} : x \in k\alpha$$

ومنـه

$$\lambda.\overline{x} = \overline{\lambda x} = \overline{\lambda k\alpha} = \overline{k(\lambda\alpha)} \Longrightarrow k(\lambda\alpha) \in k\mathbb{Z} \Longrightarrow \lambda.\overline{x} \in N$$

لنعين المقـاييس الجزئية من $M = \frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$. المقـاييس الجزئية من $M = \frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ هي:

$$\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} = \{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3},\ \overline{4},\ \overline{5},\ \overline{6},\ \overline{7}\},\ \frac{2\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} = \{\overline{0},\ \overline{2},\ \overline{4},\ \overline{6}\}$$

$$\frac{4\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} = \{\overline{0},\ \overline{4}\},\ \frac{8\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} = \{\overline{0}\}$$

❸ إثبات التكافؤ: N مقياس جزئي من الـ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-مقيـاس $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ إذا وفقط إذا كانت $(N,+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$.

الاستلزم الأول ($\Longrightarrow$) واضح. يبقى إثبات الاستلزام الثاني ومن أجل ذلك يكفي إثبـات أن:

$$\forall \overline{\lambda} \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}},\ \forall \overline{x} \in N : \overline{\lambda}.\overline{x} \in N$$

لدينـا:

$$(N,+) \leq \left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}},+\right) \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \left(N = \frac{k\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right) \wedge (k \mid n)$$

$$\overline{x} \in N \Longleftrightarrow x \in k\mathbb{Z}$$

$$\Longleftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{Z} : x \in k\alpha$$

ومنـــه

$$\overline{\lambda}.\overline{x} = \overline{\lambda x} = \overline{\lambda(k\alpha)} = \overline{k(\lambda\alpha)} \Longrightarrow \lambda x = k(\lambda\alpha) \in k\mathbb{Z} \Longrightarrow \overline{\lambda x} \in N \Longrightarrow \overline{\lambda}.\overline{x} \in N$$

لنعين المقـاييس الجزئية من $M = \frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}$. المقـاييس الجزئية من $M = \frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}$ هي:

$$\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} = \{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3},\ \overline{4},\ \overline{5},\ \overline{6},\ \overline{7},\ \overline{8},\ \overline{9},\ \overline{10},\ \overline{11}\},\ \frac{2\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} = \{\overline{0},\ \overline{2},\ \overline{4},\ \overline{6},\ \overline{8},\ \overline{10}\}$$

$$\frac{3\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} = \{\overline{0},\ \overline{3},\ \overline{6},\ \overline{9}\},\ \frac{4\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} = \{\overline{0},\ \overline{4},\ \overline{8}\},\ \frac{6\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} = \{\overline{0},\ \overline{6}\},\ \frac{12\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} = \{\overline{0}\}$$

التمرين 02:

❶ لنبين أن: $(H \cap P)+(N \cap P) \subseteq (H+N) \cap P$. ليكن X من $(H \cap P)+(N \cap P)$ إذن يوجد $x \in H \cap P$ و $y \in N \cap P$ بحيث: $X = x+y$. لكن $x \in H \cap P$ معنـاه $x \in H$ و $x \in P$ وكذلك $y \in N \cap P$ معنـاه $y \in N$ و $y \in P$ ومنه $X = x+y \in H+N$ و $X = x+y \in P$ وعليه $X \subseteq (H+N) \cap P$.

❷ إثبـات أن: $N \subset P \Longrightarrow (H \cap P)+(N \cap P) = (H+N) \cap P$. ليكن $X \in (H+N) \cap P$، لدينـا:

$$X \in (H+N) \cap P \Longrightarrow \exists x \in H,\ \exists y \in N : (X = x+y) \ \wedge \ (X \in P)$$

و

$$(y \in N) \ \wedge \ (N \subset P) \Longrightarrow y \in P \Longrightarrow y \in N \cap P$$

ومنـــه فـإن

$$X = x+y \in (H \cap P)+(N \cap P) \text{ وعليـه } x \in H \cap P \text{ و } x = X-y \in P$$

❸ إيجـاد مثال مضاد يكون فيه $(H \cap P)+(N \cap P) \subsetneq (H+N) \cap P$. كمثـال مضـاد نأخـذ:

$A=\mathbb{Z}$ و $M=\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\times\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\{(\overline{0},\overline{0}),\ (\overline{0},\overline{1}),\ (\overline{1},\overline{0}),\ (\overline{1},\overline{1})\}$.

قانون التركيب الخارجي معرف بـ:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}\times\left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\times\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right)&\longrightarrow\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\times\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\\(\lambda,(\overline{x},\overline{y}))&\longmapsto\left(\overline{\lambda x},\overline{\lambda y}\right)\end{aligned}$$

نأخذ كذلك

$$H=\{(\overline{0},\overline{0}),\ (\overline{1},\overline{1})\},\ P=\{(\overline{0},\overline{0}),\ (\overline{1},\overline{0})\},\ N=\{(\overline{0},\overline{0}),\ (\overline{0},\overline{1})\}$$

فنجـــد:

$$H\cap P=\{(\overline{0},\overline{0})\},\ N\cap P=\{(\overline{0},\overline{0})\},\ (H\cap P)+(N\cap P)=\{(\overline{0},\overline{0})\}$$
$$H+N=\{(\overline{0},\overline{0}),\ (\overline{0},\overline{1}),\ (\overline{1},\overline{0}),\ (\overline{1},\overline{1})\},$$

ومنـــه فـــإن

$(H+N)\cap P=P\neq\{(\overline{0},\overline{0})\}=(H\cap P)+(N\cap P)$ وهو المطلوب .

التمرين 03:

❶ لنبرهن أن V مقياس جزئي من A^n. أولا: واضح أن $V\neq\emptyset$ وذلك لأنه لدينا:

$$(0_A,...,0_A)\in A^n\ \wedge\ \sum_{i=1}^{n}a_i0_A=0_A\Longrightarrow(0_A,...,0_A)\in V\Longrightarrow V\neq\emptyset$$

ليكن $X=(x_1,...,x_n)$ و $Y=(y_1,...,y_n)$ من V، لدينا: $X-Y=(x_1-y_1,...,x_n-y_n)\in A^n$ وكذلك:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(x_i-y_i)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i-\sum_{i=1}^{n}a_iy_i=0_A-0_A=0_A$$

ومنه فإن $X-Y\in V$.

ثانيا: ليكن λ من A وليكن $X=(x_1,...,x_n)$ من V ولنثبت أن λX من V، لدينا: $\lambda X=(\lambda x_1,...,\lambda x_n)\in A^n$ وكذلك:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda x_i=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=\lambda0_A=0_A$$

ومنه فإن $\lambda X\in V$ وبالتالي V مقياس جزئي من A^n.

إثبات أن $\frac{A^n}{V}\simeq A$. نضع:

$$\begin{aligned}f:A^n&\longrightarrow A\\(x_1,...,x_n)&\longmapsto\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\end{aligned}$$

f تطبيق لأن

$$(x_1,...,x_n)=(y_1,...,y_n)\Longrightarrow\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=\sum_{i=1}^{n}a_iy_i$$

f تماثل لأن

$$f(X+\lambda Y)=f((x_1+\lambda y_1,...,x_n+\lambda y_n))=\sum_{i=1}^{n}a_i(x_i+\lambda y_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+\lambda\sum_{i=1}^{n}a_iy_i=f(X)+\lambda f(Y)$$

ومنه حسب نظرية التشاكل الأولى فإن $\frac{A^n}{\ker f} \simeq Imf$ وبما أن $\ker f = V$ و f غامر فإن $\frac{A^n}{V} \simeq A$ وهو المطلوب.

نضع: $N = \langle \lambda \rangle = \{\alpha\lambda,\ \lambda \in A^n\} \subseteq A^n$ ولنثبت أن $A^n = V \oplus N$ أي نثبت أن $A^n = V + N$ و $V \cap N = \{0_{A^n}\}$.

أولا نثبت أن $V \cap N = \{0_{A^n}\}$. ليكن $X = (x_1, ..., x_n) \in V \cap N$، لدينا:

$$X \in V \cap N \Longleftrightarrow X \in V \ \wedge\ X \in N \Longleftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \\ \exists \alpha \in A : x_i = \alpha\lambda_i,\ \forall i = \overline{1,n} \end{cases}$$

ومنه فإن

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \Longleftrightarrow \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i = 0$$
$$\Longleftrightarrow \alpha = 0 \Longleftrightarrow x_i = 0,\ \forall i = \overline{1,n}$$
$$\Longleftrightarrow X = 0_{A^n} = (0_A, ..., 0_A)$$

وبالتالي $V \cap N = \{0_{A^n}\}$. لنثبت الآن أن $A^n \subseteq V + N$. ليكن $X = (x_1, ..., x_n)$ من A^n، لدينا:

$$X = X - \alpha\lambda + \alpha\lambda = (x_1 - \alpha\lambda_1, ..., x_n - \alpha\lambda_n) + (\alpha\lambda_1, ..., \alpha\lambda_n)$$

بوضع: $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ نجد أن $X_1 = X - \alpha\lambda \in V$ وذلك لأن :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (x_i - \alpha\lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i = \alpha - \alpha = 0$$

لدينا كذلك $X_2 = \alpha\lambda \in N$ وذلك لأن :

$$X_2 = (\alpha\lambda_1, ..., \alpha\lambda_n) = \alpha(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \langle (\lambda_1, ..., \lambda_n) \rangle = N$$

ومنه فإن $A^n \subseteq V + N$ وبالتالي $A^n = V \oplus N$.

ليكن $v = (x_1, ..., x_n) \in V$ ولنتأكد أن $\lambda + v$ تحقق بيزوت، لدينا:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (x_i + \lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i = 1$$

لنبين الآن أنه إذا كان $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ تحقق بيزوت فإن N مع V مجموعا مباشرا لـ A^n. ليكن v من V، لدينا: $\langle \lambda + v \rangle$ مقياس إضافي يحقق بيزوت إذن توجد مالانهاية من المقاييس الإضافية لـ V.

تطبيق: نعتبر الحالة الأولى ولنعين مقياسين إضافيين لـ V، لدينا:

$$A^2 = \mathbb{Z}^2,\ \gcd(a_1, a_2) = 1,\ V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : 2x_1 + 3x_2 = 0\}$$

ولدينا كذلك

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \Longrightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (-1, 1) \Longrightarrow N_1 = \langle (-1, 1) \rangle$$

نأخذ مثلا $v = (-3, 2)$. واضح أن v من V وبالتالي فإن $\lambda + v = (-4, 3)$ تحقق بيزوت و $N_2 = \langle (-4, 3) \rangle$.

التمرين 07:

لنبرهن التكافؤ التالي:

$$\left(\exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists N \subset A : M \simeq \frac{A^n}{N}\right) \Longleftrightarrow \left(M \text{ من النوع المنتهي }\right)$$

الاستلزام الأول ($\Longleftarrow$): يكفي إيجاد تماثل بين M و A^n، لدينا M من النوع المنته معناه

$$\exists G=\{g_1,...,g_m\}\subset M:|G|<\infty$$

نأخذ $m=n$ ونعتبر φ المعرف بـ:

$$\varphi: A^n \longrightarrow M$$
$$(a_1,...,a_n)\longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i g_i$$

φ تطبيق لأن

$$\begin{aligned}(a_1,...,a_n)=(b_1,...,b_n)&\Longrightarrow a_i=b_i,\ \forall i=\overline{1,n}\\&\Longrightarrow a_i g_i=b_i g_i,\ \forall i=\overline{1,n}\\&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i g_i=\sum_{i=1}^{n} b_i g_i\end{aligned}$$

φ تماثل لأن من أجل كل x و y من A^n و λ من A، لدينا:

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda x+y)&=\varphi((\lambda x_1+y_1,...,\lambda x_n+y_n))\\&=\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i+y_i)g_i\\&=\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i g_i+\sum_{i=1}^{n}y_i g_i\\&=\lambda\varphi(x)+\varphi(y)\end{aligned}$$

إثبات أن φ غامر. نعتبر المجموعة $\{g_1,...,g_n\}$ المولدة لـ M وليكن $x\in M$، لدينا:

$$\exists(\lambda_1,...,\lambda_n)\in A^n: x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i=\varphi(\lambda_1,...,\lambda_n)$$

حسب النظرية الأولى للتشاكل لدينا $\frac{A^n}{\ker\varphi}\simeq M$ ومنه فإن

$$\exists n=|G|\ \ (M\ \text{ger}\ G),\ \exists N=\ker\varphi\subseteq A^n:\frac{A^n}{N}\simeq M$$

الاستلزام الثاني ($\Longrightarrow$): نثبت أن M من النوع المنتهي من أجل ذلك يكفي إثبات أن $\frac{A^n}{N}$ من النوع المنتهي. ليكن $\overline{x}\in N$، لدينا:

$$\begin{aligned}\overline{x}=(x_1,...,x_n)+N&=x_1e_1+...+x_ne_n+N\\&=(x_1e_1+N)+...+(x_ne_n+N)\\&=x_1(e_1+N)+...+x_n(e_n+N)\end{aligned}$$

ومنه توجد $G=\{\overline{e}_1,...,\overline{e}_n\}$ من $\frac{A^n}{N}$ بحيث:

$$\forall\overline{x}\in\frac{A^n}{N},\ \exists x_i\in A:\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{e}_i$$

إذن $\frac{A^n}{N}$ من النوع المنتهي وبما أن $\frac{A^n}{N}\simeq M$ فإن M من النوع المنتهي.

نعتبر $A=\mathbb{Z}$ و $M=\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ ولنبين أن الجملة $\{\overline{2},\overline{3}\}$ مولدة لـ M. الجملة $\{\overline{2},\overline{3}\}$ مولدة لـ M إذا كان $\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ هو أصغر

مقياس جزئي يحويها. المقـاييس الجزئية لـ $\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ هي:

$$\{\overline{2},\ \overline{3}\} \subseteq \frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} = \{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3},\ \overline{4},\ \overline{5},\ \overline{6},\ \overline{7}\},\ \frac{2\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} = \{\overline{0},\ \overline{2},\ \overline{4},\ \overline{6}\}$$
$$\frac{4\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} = \{\overline{0},\ \overline{4}\},\ \frac{8\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} = \{\overline{0}\}$$

لنبين أن $\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \simeq \frac{\mathbb{Z}^2}{V}$ حيث V مقياس جزئي من $\mathbb{Z}^2$ يطلب تعيينه. حسب ما سبق فإن $\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ من النوع المنتهي. حسب جواب السؤال الأول، لدينـا: $\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \simeq \frac{\mathbb{Z}^2}{\ker f}$ بحيث:

$$f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$$
$$(a,b) \longmapsto \overline{2}a + \overline{3}b$$

يبقي تعيين $\ker f$، لدينـا:

$$\ker f = \left\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : \overline{2a+3b} = 0_{\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}} = 8\mathbb{Z}\right\}$$

ليكن (a,b) من $\ker f$، لدينـا:

$$(a,b) \in \ker f \iff \exists k \in \mathbb{Z} : 2a+3b = 8k$$
$$\iff \exists k,\ k' \in \mathbb{Z} : 3b = -2a + 8k = 2k'$$

بمـا أن 2 يقسم $3b$ و 2 و 3 أوليان فيما بينهما فإنه حسب غوص فإن 2 يقسم b وعليه يوجد α من $\mathbb{Z}$ بحيث: $b = 2\alpha$ وبالتـالي يصبح لدينـا:

$$2a + 6\alpha = 8k \iff a = -3\alpha + 4k,\ k \in \mathbb{Z}$$

ومنـه فـإن

$$(a,b) \in \{(-3\alpha + 4k,\ 2\alpha),\ \alpha, k \in \mathbb{Z}\}$$

لنتأكد من أن $(a,b) \in \{(-3\alpha+4k,\ 2\alpha),\ \alpha,k \in \mathbb{Z}\}$. ليكن k و α مـن $\mathbb{Z}$، لدينـا:

$$f\left((-3\alpha + 4k,\ 2\alpha)\right) = \overline{8k - 6\alpha + 6\alpha} = \overline{8k} = 8\mathbb{Z}$$

المراجع العلمية

[1] أحمد آيت المختار: دروس "في الجبر 4" لأساتذة التعليم المتوسط السنة الرابعة رياضيات، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة، الجزائر، 2004 .

[2] محمد عبد العظيم سعود: مبادئ الجبر المجـرد، كلية العلوم بجامعة عين شمس، القاهرة، 2002 .

[3] ايان ستيوارت، ترجمة معروف عبدالرحمان سرحان و فوزي أحمد الذكير: نظـرية جالوا، الطبعة الثانية، قسم الرياضيات بجامعة الملك سعود، 1988 .

[4] V. Guirardel: Polycopié de cours: Algèbre générale de base, Université de Rennes 1, 2020-2021.

[5] R. Basson: Polycopié de cours et exercices d' algèbre générale de base, ENS Rennes, 2014-2015.

[6] D. Schaub: Polycopié de cours: Eléments d'algèbre commutative, Université d'Angers, 2003.